Aufgaben

zu

Stegmann's

Grundlehren der ebenen Geometrie

von

J. Lengauer.

Kempten.
Verlag der Jos. Kösel'schen Buchhandlung.
1886.

Verlag der Jos. Kösel'schen Buchhandlung in Kempten.

Zu beziehen durch alle Buchhandlungen des In- und Auslandes.

Arnold, Dr. Bernh., Zur Frage der Ueberbürdung an den humanistischen Gymnasien. 8°. Preis 35 ₰.

Baumann, Dr., F. L., **Die oberschwäbischen Bauern** im März 1525 und die 12 Artikel. 8°. broch. Preis 1 ℳ 40 ₰.

— — **Illustrirte Geschichte des Allgäus.** 8°. Erscheint in circa 24 Lieferungen à 1 ℳ 20 ₰; bisher erschienen 13 Lieferungen.

Burgartz, C. F., **Antihypochondricus.** Sammlung von 208 neuen Anekdoten, nebst drei humoristischen Deklamationsstücken. Zweite Auflage. 12°. broch. Preis 75 ₰, gebd. 1 ℳ.

— — **Höflichkeits- und Anstandslehre** für Feiertags-, Fortbildungs-, Real-, Präparanden- und Lateinschulen, sowie für Erwachsene zum Selbstunterrichte. Vierte Auflage. 12°. Preis broch. 60 ₰, gebd. 80 ₰.

Ein erfahrener Pädagog (s. „Aehrenlese 1874 Nro. 6) sagt: „Dieses vortreffliche Büchlein ist weder ein pures Moral- noch auch ein bloßes Komplimentirbuch, sondern zwischen beiden die Mitte haltend ein Schul- und Hausbuch für einen ebenso wichtigen als leider nur allzu vielfach unterschätzten und vernachlässigten Zweig der Pädagogik. Der Verfasser zeigt auf jeder Seite desselben einen entschiedenen pädagogischen Beruf, feines Gefühl für Anstand und gute Sitte und eine reiche Erfahrung auf dem Gebiete vielgestalteter Lebensverhältnisse." — Wir empfehlen diese „Höflichkeitslehre" allen Schulmännern angelegentlich zur Beachtung, umsomehr, als selbe durch hohe Entschließung des k. b. Cultusministeriums vom 30. Mai 1874 zur Anschaffung empfohlen wurde. Dieser Umstand, sowie das so rasche Nöthigwerden von 4 starken Auflagen überhebt uns jeder weiteren Anpreisung.

Disciplinarsatzungen für die Schüler der Studien-Anstalten des Königreichs Bayern. Oktav-Ausgabe (7. Auflage) 10 ₰, Taschen-Ausgabe (zweite Auflage) 20 ₰, Folio-Ausgabe unaufgezogen 30 ₰, aufgezogen 50 ₰.

Disciplinarsatzungen für die Schüler der Realschulen des Königreichs Bayern. Oktavausgabe (3. Aufl.) 10 ₰, Taschen-Ausgabe 20 ₰.

L'Echo français. Journal non politique, rédigé par D. Dornier. 4°. Jahrgang 1868 bis 1872. Preis pro Jahrg. einzeln 6 ℳ, alle zusammengenommen à 3 ℳ.

Einsle, L.. **Systematische Zusammenstellung** der vorzüglichsten europäischen Maße, Gewichte und Münzen, mit besonderer Rücksicht auf das Königreich Bayern und die größeren Zollvereinsstaaten, nebst vielen erläuternden und gemeinnützigen Anmerkungen, auch Notizen über die bayr. Landesvermessung und den bayer. Grundsteuerkataster enthaltend, für Schulen und zum Privatgebrauche als praktischer Anhang zu jedem Lehrbuche der Arithmetik. gr. 12°. Herabgesetzter Preis 60 ₰.

Entwurf, kurzer, einer **Globuslehre** für Werk- und Feiertagsschulen, von dem Verfasser der Höflichkeits- und Anstandslehre für Schulen. kl. 8°. Preis 20 ₰.

Gratz, Dr. L. Clem., **Erd- und Länderkunde der hl. Schrift** für kath. Schulen und Familien. 12°. Herabgesetzter Preis 70 ₰.

Haggenmiller, F., **Genealogie der Hohenzollern** von 1061 bis 1871. Preis cart. 75 ₰

Aufgaben

zu

Stegmann's

Grundlehren der ebenen Geometrie

von

J. Lengauer.

Kempten.

Verlag der Jos. Kösel'schen Buchhandlung.

1885.

Die fetten Nummern verweisen auf die zweite Auflage der ebenen Geometrie.

I. Anhang.

Übungen zu 13 – 35.

1) Zu einem gegebenen Winkel den Nebenwinkel zu zeichnen. Wie viele Nebenwinkel hat ein Winkel?

2) Berechne den Nebenwinkel von α, wenn $\alpha = 50^\circ$; $78^\circ\ 36'$; $120^\circ\ 30'\ 40''$; $136^\circ\ 45''$; $\frac{3}{4}$ R.

3) Wie groß ist ein Winkel, welcher sich zu seinem Nebenwinkel verhält wie 1 : 2; 2 : 3; 4 : 5; m : n?

4) Von zwei Nebenwinkeln ist der eine um 40° größer als der andere; wie groß ist jeder?

5) Bestimme a) das Supplement und b) das Komvlement der Winkel: $\alpha = \frac{4}{5}$ R; $\beta = 48^\circ 30'$; $\gamma = 75^\circ\ 18''$; $\delta = R - \varepsilon$?

6) Ein gestreckter Winkel ist in drei Teile geteilt, die sich wie 1 : 2 : 3 [m : n : p] verhalten; wie groß ist jeder?

7) 3 (n) Gerade schneiden sich in einem Punkte Welches ist die Zahl der von je zwei aufeinander folgenden Strahlen gebildeten Winkel? Wie groß ist einer, wenn sie alle gleich sind?

8) Durch einen Punkt sind 3 [5, 7] Gerade gezogen; beweise, daß die Summe von 3 [5, 7] nicht anstoßenden Winkeln 2 R beträgt.

9) Von einem Punkte aus sind 5 Strahlen so gezogen, daß die Winkel zwischen je zwei aufeinander folgenden Strahlen der Reihe nach sich wie 1 : 2 : 3 : 4 : 5 verhalten; wie viel Grad mißt jeder?

10) Die Halbierungslinien zweier Nebenwinkel stehen auf einander senkrecht.

11) Zwei aneinanderliegende Winkel sind Nebenwinkel, wenn ihre Halbierungslinien aufeinander senkrecht stehen.

12) Errichtet man zur Halbierungslinie des einen von zwei Nebenwinkeln im Scheitel die Senkrechte, so halbiert diese den andern.

13) Die Gerade, welche zur Halbierungslinie eines Winkels im Scheitel senkrecht steht, bildet mit den beiden Schenkeln gleiche Winkel.

14) Die Rückverlängerung der Halbierungslinie eines Winkels halbiert den Scheitelwinkel.

15) Die Winkel zweier sich schneidender Geraden werden durch zwei aufeinander senkrechte Gerade halbiert.

16) Bilden die einen Schenkel zweier gleicher Winkel mit demselben Scheitel eine Gerade und liegen die Winkel auf verschiedenen Seiten dieser Geraden, so fallen auch die anderen Schenkel in eine Gerade.

II. Anhang.

Übungen zu 36–58.

1) Zwei Gerade werden von einer dritten so geschnitten, daß zwei Gegenwinkel je 40^0 [60^0; 105^0] betragen; wie groß ist jeder Winkel an ihren Schnittpunkten?

2) Welche Beziehung besteht zwischen den Winkeln α und ζ [β, ε; γ, ϑ; δ, η] der Figur zu 36, wenn $\alpha = \varepsilon$ ist?

3) Welche Beziehungen bestehen zwischen den Gegenwinkeln, Wechselwinkeln und Ergänzungswinkeln, wenn

a) zwei Gegenwinkel supplementär sind, oder

b) zwei Wechselwinkel zusammen π betragen, oder

c) zwei Ergänzungswinkel gleich sind?

4) Ist ein innerer Winkel kleiner als der äußere Gegenwinkel, so ist

a) der innere Winkel auf Seite dieser Gegenwinkel kleiner als sein Wechselwinkel, und es sind

b) die innern Ergänzungswinkel auf Seite des kleineren Wechselwinkels zusammen genommen kleiner als π, auf der andern Seite der schneidenden Geraden aber zusammen genommen größer als π.

5) Ist ein innerer Winkel kleiner als sein Wechselwinkel, so ist

a) dieser kleinere Winkel auch kleiner als sein äußerer Gegenwinkel, und sind

b) die inneren Ergänzungswinkel auf Seite dieses kleineren Winkels zusammen kleiner, auf der anderen Seite der schneidenden Geraden zusammen größer als π.

6) Sind zwei innere Ergänzungswinkel zusammen kleiner als π, so ist auch ein innerer Winkel auf Seite dieser Ergänzungswinkel

a) kleiner als sein Gegenwinkel, und

b) kleiner als sein Wechselwinkel.

7) Zwei Gerade AB und CD werden von einer dritten so geschnitten, daß ein äußerer Winkel 90^0 [75^0; $68^0\ 30'$] und sein Gegenwinkel 60^0 [55^0; $53^0\ 30'$] beträgt. Unter welchem Winkel schneiden sich AB und CD? Wie groß ist der Unterschied zwischen je zwei Gegenwinkeln oder zwischen je zwei Wechselwinkeln? Um wie viel ist die Summe von je zwei Ergänzungswinkeln größer oder kleiner als 180^0? (Ziehe eine Parallele.)

8) Zwei Gerade werden von einer dritten so geschnitten, daß von zwei inneren Ergänzungswinkeln der eine 90^0 [50^0], der andere 50^0 [40^0] beträgt. Beantworte dieselben Fragen wie in 7.

9) Zwei Gerade schneiden sich unter einem Winkel von 40^0. Sie werden von einer dritten so geschnitten, daß ein innerer Winkel auf Seite des Schnittpunktes 100^0 beträgt. Wie groß sind die übrigen Winkel an der Transversale?

10) Wenn eine Gerade zwei Parallele unter gleichen Ergänzungswinkeln schneidet, so steht sie auf den Parallelen senkrecht.

11) Die Halbierungslinien zweier Gegenwinkel (oder Wechselwinkel) an Parallelen sind parallel.

12) Zwei Gerade, welche auf zwei Parallelen bezüglich senkrecht stehen, sind parallel.

13) Zwei Gerade, welche auf zwei sich schneidenden Geraden bezüglich senkrecht stehen, schneiden sich.

14) Satz 58 mit der Verbindungslinie der Scheitel als Hilfslinie zu beweisen.

15) Die Halbierungslinien von zwei Winkeln, deren Schenkel bezüglich parallel und gleich gerichtet sind, laufen parallel.

16) Sind die Halbierungslinien zweier gleicher Winkel parallel, so sind auch die Schenkel der Winkel bezüglich parallel.

17) Sind die Schenkel zweier Winkel BAC und B'A'C' parallel und gleichgerichtet und wird durch A' die Parallele A'D' zur Halbierungslinie AD des Winkels BAC gezogen, so halbiert A'D' den Winkel B'A'C'.

III. Anhang.

Übungen zu 59–86.

1) Ist ein Dreieck mit den Seiten 25, 30, 60 cm [38, 21, 36; 30, 40, 70; 100, 60, 30 cm] möglich?

2) Verbindet man einen Punkt im Innern eines Dreieckes mit den drei Ecken, so ist die Summe der Verbindungsstrecken größer als der halbe und kleiner als der ganze Umfang. 66. 68.

3) Wählt man auf jeder Seite eines Dreieckes einen Punkt beliebig und verbindet diese Punkte durch Strecken, so hat das eingeschriebene Dreieck einen kleineren Umfang als das gegebene. 66.

4) In jedem Viereck ist die Summe der Diagonalen 1) kleiner als der Umfang, 2) größer als die Summe zweier Gegenseiten, 3) größer als der halbe Umfang.

5) Ist einem Polygon mit hohlen Winkeln ein anderes eingeschrieben, so hat das eingeschriebene Vieleck den kleineren Umfang.

6) Sind über einer Strecke zwei Vielecke konstruiert, von denen das eine ganz innerhalb des anderen liegt, so hat das innere den kleineren Umfang.

---

7) Aus zwei Winkeln α und β eines Dreieckes den dritten zu berechnen. 1) $\alpha = 48^0$, $\beta = 72^0$; 2) $\alpha = 90^0$, $\beta = 63^0$; 3) $\alpha = 48^0\ 37'\ 12''$, $\beta = 100^0\ 16'\ 48''$.

8) Wie groß sind die Winkel eines Dreieckes, wenn sie sich verhalten wie a) 1 : 2 : 3; b) 1 : 1 : 2; c) 4 : 5 : 6; d) 1 : 3 : 8? Von welcher Art sind die Dreiecke?

9) Wie groß ist die Summe der drei Außenwinkel eines Dreieckes?

10) Die Winkel eines rechtwinkligen Dreieckes zu bestimmen, wenn ein Außenwinkel $\delta = 146^0$ [135^0] gegeben ist.

11) Ein Außenwinkel eines Dreieckes ist $= 100^0\,20'$ [$80^0\,30'$], ein gegenüberliegender innerer Winkel $60^0\,40'$ [$50^0\,40'$]; berechne die beiden anderen Dreieckswinkel.

12) Verbindet man einen Punkt D innerhalb eines Dreieckes ABC mit den Ecken A und C, so ist $\wedge$ ADC $>$ ABC.

Zum Beweise ziehe die Gerade BD.

13) Fällt man auf die Schenkel eines spitzen Winkels α von einem Punkte außerhalb desselben die Senkrechten, so schließen diese einen Winkel gleich α ein.

14) Bestimme den Winkel, unter welchem sich die Halbierungslinien zweier Ergänzungswinkel an Parallelen schneiden.

15) Die Halbierungslinien der Winkel α und β eines Dreieckes ABC schneiden sich in einem Punkte D innerhalb des Dreieckes so, daß $\wedge$ ADB $= R + \frac{1}{2}\gamma$.

16) Die Halbierungslinien der Außenwinkel eines Dreieckes ABC bilden mit den Seiten drei Dreiecke, welche in den Winkeln übereinstimmen.

Berechne die Winkel aus den Winkeln α, β, γ des $\triangle$ ABC.

17) Die Halbierungslinie eines Dreieckswinkels bildet mit der auf die Gegenseite gefällten Höhe einen Winkel, welcher gleich ist der halben Differenz der anderen Dreieckswinkel.

18) Im spitzwinkligen Dreiecke fällt jede Höhe in das Dreieck. Beweis indirekt mit 69.

19) Im stumpfwinkligen Dreiecke fällt eine Höhe, welche vom Scheitel eines spitzen Winkels auf die Gegenseite gezogen wird, über das Dreieck hinaus. Beweis indirekt.

---

20) Ein Winkel an der Basis eines gleichschenkligen Dreieckes mißt $47^0\,25'$ [$63^0\,48'$]; wie groß ist der Winkel an der Spitze?

21) Aus dem Winkel β an der Spitze eines gleichschenkligen Dreieckes die Winkel an der Basis zu berechnen. $\beta = 36^0\,25'$; $\beta = 120^0$; $\beta = R$.

22) Der Außenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreieckes mißt 136^0 [80^0; 120^0]; wie groß sind die Winkel des Dreieckes?

23) Von welcher Art sind die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes?

24) Was läßt sich von den Außenwinkeln an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes behaupten?

25) Welches Verhältnis besteht zwischen dem Außenwinkel an der Spitze und einem inneren Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes?

26) Die Seite AC eines Dreieckes ABC ist über A hinaus um AB und über C hinaus um BC verlängert worden. Die erhaltenen Punkte D und E bestimmen mit B ein Dreieck DEB, dessen Winkel bez. gleich $\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{2}\gamma$, $R + \frac{1}{2}\gamma$ sind.

27) In einem Dreiecke ABC sei AC auf der Seite BC von C aus abgetragen und der erhaltene Punkt D mit A verbunden. Beweise, daß $\wedge$ DAB $= \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

28) Die Halbierungslinie des Außenwinkels an der Spitze eines gleichschenkligen Dreieckes ist zur Grundlinie parallel.

29) Zieht man durch die Spitze eines gleichschenkligen Dreieckes die Parallele zur Grundlinie, so wird der Außenwinkel an der Spitze halbiert.

30) Ist die Halbierungslinie eines Außenwinkels an einem Dreiecke parallel mit einer Dreiecksseite, so sind die beiden anderen Seiten von gleicher Länge.

31) Schneidet man die Schenkel eines gleichschenkligen Dreieckes durch eine Parallele zur Grundlinie, so ist das abgeschnittene Dreieck auch gleichschenklig. Umkehrung!

32) In einem gleichschenkligen Dreiecke, in welchem der Winkel an der Spitze 36^0 mißt, ist ein Winkel an der Grundlinie halbiert; beweise, daß die beiden Teildreiecke gleichschenklig sind und in den Schenkeln übereinstimmen.

33) Zur Grundlinie AC eines Dreieckes ABC ist durch den Schnittpunkt der Halbierungslinien der Basiswinkel die Parallele gezogen, welche AB in D und BC in E schneidet. Beweise, daß DE $=$ AD $+$ CE.

34) Ein Dreieck, in welchem ein Winkel der Summe der beiden anderen gleich ist, ist rechtwinklig.

35) Der rechte Winkel eines rechtwinkligen Dreieckes kann auf zweifache Art in zwei Teile zerlegt werden, welche einzeln den spitzen Winkeln gleich sind. Die eine Teilungslinie zerlegt das Dreieck in zwei Teildreiecke, welche mit dem ganzen Dreiecke und

also auch unter sich in den Winkeln übereinstimmen; die andere Teilungslinie teilt das Dreieck in zwei gleichschenklige Dreiecke. Beweis!

36) In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist die Mitte der Hypotenuse von den drei Ecken gleichweit entfernt. Oder: der über der Hypotenuse als Durchmesser beschriebene Kreis geht durch die Spitze des Dreieckes. A. 35.

37) Ein Dreieck, in welchem die Entfernung einer Ecke von der Mitte der Gegenseite gleich der Hälfte dieser Seite ist, ist an jener Ecke rechtwinklig.

Aus 36 und 37 folgt: Der geometrische Ort für die Spitzen der rechtwirkligen Dreiecke über einer gegebenen Hypotenuse ist der Halbkreis, welcher die Hypotenuse zum Durchmesser hat.

38) Ist die Strecke, welche eine Dreiecksecke mit der Mitte der Gegenseite verbindet, größer als die Hälfte dieser Seite, so ist der Dreieckswinkel an jener Ecke spitz.

Zum Beweise wende zweimal 79 und 69 an.

39) Ist die Strecke, welche eine Dreiecksecke mit der Mitte der Gegenseite verbindet, kleiner als die Hälfte dieser Seite, so ist der Dreieckswinkel an jener Ecke stumpf.

40) Die Halbierungslinie eines Dreieckswinkels teilt die Gegenseite in zwei Abschnitte, von denen jeder kleiner ist als die anliegende Dreiecksseite.

41) Liegt P zwischen den Schenkeln eines Winkels A und ist die Senkrechte PB auf den einen Schenkel größer als die Senkrechte PC auf den andern, so ist $AB < AC$.

Zum Beweise verbinde B mit C und wende 79 und 82 an.

42) Sind die Punkte A und B einer Geraden mit einem Punkte P außerhalb derselben verbunden und bildet PA mit der von P auf AB gefällten Senkrechten einen größeren Winkel als PB, so ist $PA > PB$. (PA und PB können auf derselben oder auf verschiedenen Seiten der Senkrechten liegen.)

43) Die Summe der drei Höhen eines Dreieckes ist kleiner als der Umfang.

IV. Anhang.

Übungen zu 87—105.

1) Die Höhen auf die Schenkel eines gleichschenkligen Dreieckes sind gleich. Wann fallen diese Höhen in das Dreieck und wann über das Dreieck hinaus? — Umkehrung!

2) Die Halbierungslinien der Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreieckes sind gleich.

3) Im gleichschenkligen Dreiecke sind die zu den Schenkeln gehörigen Mittellinien gleich.

4) Die drei Höhen eines gleichseitigen Dreieckes sind gleich. Umkehrung!

5) Eine Senkrechte zur Halbierungslinie eines Winkels schneidet auf den Schenkeln gleiche Strecken ab.

6) Die Senkrechten von der Mitte der Grundlinie auf die Schenkel eines gleichschenkligen Dreieckes sind gleich.

7) Die Senkrechten von den Mitten der Schenkel auf die Basis eines gleichschenkligen Dreieckes sind gleich.

8) Verlängert man in einem gleichschenkligen Dreiecke die Basis über beide Endpunkte hinaus um gleiche Strecken und verbindet die erhaltenen Punkte mit der Spitze, so sind diese Verbindungsstrecken gleich.

9) Verkürzt (oder verlängert) man die drei Seiten eines gleichseitigen Dreieckes von den drei Ecken aus um dieselbe Strecke, so sind die konstruierten Punkte die Ecken eines eingeschriebenen gleichseitigen Dreieckes.

10) Die Senkrechten von zwei Ecken eines Dreieckes auf die Mittellinie aus der dritten Ecke sind gleich.

11) In einem gleichschenkligen Dreiecke ist der eine Schenkel von der Basis aus um eine beliebige Strecke verkürzt und der andere um die gleiche Strecke über die Basis hinaus verlängert worden; zu beweisen, daß die Strecke, welche die konstruierten Punkte verbindet, von der Grundlinie halbiert wird.

Zum Beweise ziehe eine Parallele.

12) Verlängert (oder verkürzt) man die Schenkel eines gleichschenkligen Dreieckes ABC über die Basispunkte hinaus um gleiche Strecken, AD = CE; und verbindet die erhaltenen Punkte D und E mit den gegenüberliegenden Ecken C und A, so ist AE = CD. Die Gerade, welche den Schnittpunkt F von AE und CD mit B verbindet, halbiert den Winkel ABC.

13) Die Basis AC eines gleichschenkligen Dreieckes ABC ist über A hinaus bis D und über C hinaus bis E verlängert worden, so daß BD = BE ist. Beweise, daß $\triangle$ ABD $\cong$ CBE.

Es seien ferner durch A und C bis zum Durchschnitte mit BE zwei Strecken AF und CG so gezogen, daß $\wedge$ FAE = GCE = BED; zu beweisen, daß $\triangle$ BAF $\cong$ BCG.

14) Ist in einem rechtwinkligen Dreiecke die Hypotenuse zweimal so groß als eine Kathete, so liegt der letzteren ein Winkel von 30^0 gegenüber. Zum Beweise ergänze das Dreieck zu einem gleichseitigen oder benütze A. 36, Anhang III.

15) Beträgt in einem rechtwinkligen Dreieck ein Winkel 30^0, so ist die Hypotenuse zweimal so groß als die kleinere Kathete.

16) Ein Punkt D auf dem einen Schenkel AB eines gleichschenkligen Dreieckes ist mit einem Punkt E verbunden, welcher auf der Verlängerung des andern Schenkels BC so gewählt wird, daß AD = CE ist. Beweise, daß DE $>$ AC ist. 89.

17) Auf zwei Seiten AB und AC eines Dreieckes werden zwei Punkte D und E so angenommen, daß BD = CE. Beweise, daß DE $<$ BC ist. 89.

18) Jede Mittellinie eines Dreieckes ist kleiner als die halbe Summe der von derselben Ecke ausgehenden Seite; sie teilt ferner den Dreieckswinkel in zwei ungleiche Teile, von denen der größere Winkel der kleineren Dreiecksseite anliegt.

Zum Beweise verlängere die Mittellinie um sich selbst und verbinde den erhaltenen Punkt mit einem Endpunkt der halbierten Seite.

V. Anhang.

Übungen zu 106—126.

1) Aus drei Winkeln eines Viereckes den vierten zu berechnen.

$\alpha = 75^0, \quad \beta = 65^0, \quad \gamma = 145^0.$

$\alpha = 90^0 15''; \quad \beta = 100^0, \quad \gamma = 120^0\ 30' 45''.$

$\alpha = 50^0, \quad \beta = 70^0, \quad \gamma = 40^0.$

2) Werden von einem beliebigen Punkt innerhalb eines Winkels auf die Schenkel die Senkrechten gefällt, so ergänzt der Winkel dieser Senkrechten den gegebenen Winkel zu π.

3) Ein Viereck, in welchem zwei Seiten parallel und zwei gegenüberliegende Winkel gleich sind, ist ein Parallelogramm.

4) Sind in einem Vierecke zwei Gegenseiten und zwei gegenüberliegende Winkel gleich und sind diese Winkel $\overline{\gtrless}$ R, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

5) Im rechtwinkligen Parallelogramm bilden die Diagonalen mit einer Seite gleiche Winkel. Umkehrung.

6) Im rechtwinkligen Parallelogramm steht der Schnittpunkt der Diagonalen von allen Ecken gleichweit ab. Umkehrung.

7) Im gleichseitigen Parallelogramm werden die Winkel durch die Diagonalen halbiert. Umkehrung.

8) Im gleichseitigen Parallelogramm steht der Schnittpunkt der Diagonalen von den Seiten gleichweit ab.

9) Im schiefwinkligen Parallelogramm liegt dem stumpfen Winkel die größere Diagonale gegenüber. 89. Umkehrung.

10) Im ungleichseitigen Parallelogramm liegt der größeren Seite der größere Winkel der Diagonalen gegenüber. Umkehrung.

11) In der Raute sind die Abstände je zweier Gegenseiten (Höhen) gleich.

12) Von welcher Art ist ein Viereck, in welchem jede Seite mit den Diagonalen gleiche Winkel bildet?

13) Die Verbindungsstrecke der Mitten zweier Gegenseiten eines Parallelogrammes ist parallel und gleich jeder der beiden anderen Gegenseiten und geht durch den Schnittpunkt der Diagonalen.

14) Auf jeder durch den Diagonalenschnittpunkt eines Parallelogrammes gezogenen Geraden wird die von zwei Gegenseiten begrenzte Strecke durch den Diagonalenschnittpunkt halbiert.

15) Durch den Diagonalenschnittpunkt eines Parallelogrammes sind zwei Gerade gezogen und ihr Schnittpunkt mit den Seiten verbunden; zu beweisen, daß das eingeschriebene Viereck auch ein Parallelogramm ist.

Wie sind die Geraden zu ziehen, damit sie die Seiten des Parallelogrammes in den Ecken einer Raute schneiden?

16) Ist einem Parallelogramme ein anderes eingeschrieben, so fallen die Schnittpunkte der Diagonalen zusammen.

17) Verkürzt man die Seiten eines Parallelogrammes von zwei gegenüberliegenden Ecken aus um gleiche Strecken, so sind die konstruierten Punkte die Ecken eines Parallelogrammes.

Von welcher Art ist das erhaltene Parallelogramm, wenn das gegebene gleichseitig ist?

18) Verlängert man eine Diagonale eines Parallelogrammes über beide Endpunkte hinaus um gleiche Strecken und ver-

bindet die konstruierten Punkte mit den Endpunkten der anderen Diagonale, so erhält man ein Parallelogramm.

Von welcher Art ist dieses Parallelogramm, wenn das gegebene gleichseitig ist?

19) Die Halbierungslinien der Winkel eines Parallelogrammes schließen ein Rechteck ein.

20) Die Halbierungslinien der Winkel eines Rechteckes schließen ein Quadrat ein.

21) Zieht man von einem Punkt der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes die Parallelen zu den Schenkeln, so ist die Summe dieser Strecken gleich einem Schenkel.

22) Fällt von einem Punkte der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes die Senkrechten auf die Schenkel, so ist ihre Summe gleich der Höhe auf einen Schenkel.

23) Wird durch die Ecke A eines Parallelogrammes ABCD eine beliebige Gerade AX gezogen, so ist der Abstand der Gegenecke C von AX gleich der Differenz (Summe) der Abstände der Ecken B und D von der Geraden, wenn AX das Parallelogramm schneidet (nicht schneidet).

---

24) Durch die Ecken eines Dreieckes ABC sind nach derselben Richtung die gleichen Strecken AA_1, BB_1, CC_1 gezogen und deren Endpunkte mit einander verbunden; zu beweisen, daß $\triangle A_1B_1C_1 \cong ABC$ und daß die homologen Seiten dieser Dreiecke gleichgerichtet sind.

25) Die Ecken eines Dreieckes ABC sind mit einem beliebigen Punkte S verbunden und diese Verbindungsstrecken über S hinaus um sich selbst bez. bis A_1, B_1, C_1 verlängert; zu beweisen, daß $\triangle A_1B_1C_1 \cong ABC$ und daß die homologen Seiten dieser Dreiecke entgegengesetzt gerichtet sind.

26) Wenn zwei Paare homologer Seiten kongruenter Dreiecke bezüglich parallel und gleichgerichtet sind, so sind auch die dritten Seiten und die Verbindungslinien homologer Ecken parallel.

27) Sind zwei Paare homologer Seiten kongruenter Dreiecke bezüglich parallel und entgegengesetzt gerichtet, so sind auch die drit-

ten Seiten entgegengesetzt gerichtet und die Verbindungslinien homologer Ecken schneiden sich in einem Punkte.

28) Die drei Höhen eines Dreieckes schneiden sich in einem Punkte.

Ziehe durch die Ecken die Parallelen zu den Gegenseiten und zeige, daß die Höhen des eingeschriebenen Dreieckes die Mittelsenkrechten der Seiten des umgeschriebenen Dreieckes sind.

---

29) Welche Sätze ergeben sich aus 124, 125 und 126 für das Dreieck, wenn man dieses als Trapez betrachtet, dessen eine parallele Seite null ist.

30) Zwischen zwei Parallelen G und G' ist eine Senkrechte gezogen und durch die Mitte derselben zu den Geraden G und G' die Parallele gezogen (Mittelparallele). Beweise, daß die Punkte der Mittelparallelen, und nur diese, von G und G' gleichweit abstehen.

Der geometrische Ort für alle Punkte, welche von zwei Parallelen gleiche Entfernung haben, ist die Mittelparallele zu denselben.

31) Die Mittelparallele zu zwei Parallelen G und G' halbiert jede zwischen G und G' liegende Strecke.

---

32) Ein Trapez, in welchem die nicht parallelen Seiten gleich sind, heißt gleichschenklig (Antiparallelogramm).

Eigenschaften des gleichschenkligen Trapezes:

a) die Winkel an jeder der parallelen Seiten sind gleich.
b) Je zwei Gegenwinkel sind supplementär.
c) Die Diagonalen sind gleich.
d) Die Diagonalen bilden mit den parallelen Seiten gleiche Winkel.
e) Die Mittelsenkrechte zu einer der parallelen Seiten halbiert auch die andere senkrecht; sie geht durch den Schnittpunkt der Diagonalen und den Treffpunkt der nicht parallelen Seiten.
f) Welche Strecken und Winkel an der für d) und e) gezeichneten Figur sind noch einander gleich?

g) Die Mittelsenkrechten der nicht parallelen Seiten schneiden sich auf der Mittelsenkrechten der parallelen Seiten. Der Schnittpunkt steht von den vier Ecken gleichweit ab.

33) Ein Viereck ist ein gleichschenkliges Trapez,

a) wenn zwei Gegenseiten parallel und die der einen Parallelen anliegenden Winkel gleich sind;

b) wenn zwei Gegenseiten gleich sind und ebenso die Winkel an einer dritten;

c) wenn 2 Gegenseiten parallel und zwei gegenüberliegende Winkel gleich sind,

d) wenn zwei aufeinander folgende stumpfe Winkel und die Diagonalen gleich sind;

e) wenn zwei Gegenseiten und die Diagonalen gleich sind;

f) wenn die Diagonalen gleich sind und mit einer Seite gleiche Winkel bilden.

34) Ein Viereck, in welchem die an einer Ecke zusammentreffenden Seiten gleich sind und ebenso die an der Gegenecke, heißt Deltoid. Die Diagonale, welche die gemeinsamen Endpunkte gleicher Seiten verbindet, wird Längsdiagonale, die andere Querdiagonale genannt.

Eigenschaften des Deltoides:

a) Die Gegenwinkel, welche von ungleichen Seiten eingeschlossen werden, sind gleich.

b) Die Längsdiagonale halbiert die Querdiagonale senkrecht.

c) Die Längsdiagonale halbiert die Winkel, durch deren Scheitel sie geht.

d) Die Verbindungslinie der Schnittpunkte der Gegenseitenpaare steht auf der Längsdiagonale senkrecht und ist zur Querdiagonale parallel.

e) Welche Strecken und Winkel an der für d) gezeichneten Figur sind noch einander gleich?

f) Die Halbierungslinien der gleichen Gegenwinkel schneiden sich auf der Längsdiagonale. Dieser Punkt steht von den vier Seiten gleich weit ab.

35) Ein Viereck ist ein Deltoid,

a) wenn zwei Gegenwinkel und die Seiten an einer dritten Ecke gleich sind; (zum Beweise verbinde die Scheitel der gleichen Winkel;)

b) wenn eine Diagonale durch die andere senkrecht halbiert wird;

c) wenn eine Diagonale die Winkel halbiert, deren Scheitel sie verbindet;

d) wenn zwei anstoßende Seiten gleich und der eingeschlossene Winkel durch die Diagonale halbiert wird;

e) wenn zwei anstoßende Seiten gleich sind und die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen;

f) wenn zwei anstoßende Seiten gleich sind und die durch ihre gemeinsame Ecke gehende Diagonale die andere Diagonale halbiert.

VI. Anhang.

Übungen zu 127—133.

1) Wie groß ist die Summe der Außenwinkel eines Polygons?

2) Wie groß ist jeder Winkel eines gleichwinkligen n Eckes? n = 5; 6; 10; 12; 15; 30.

3) Gibt es eine geradlinige Figur, in welcher die Winkelsumme 5 R oder 7 R beträgt?

4) Ein Vieleck hat wenigstens drei hohle Winkel.

5) Ein Vieleck mit lauter hohlen Winkeln kann höchstens drei spitze Winkel haben.

6) In welchem Polygon beträgt die Winkelsumme 540° (900°; 7020° 24 R)?

7) Wie viele Diagonalen gibt es im 16 Eck von jeder Ecke aus und welches ist die Zahl sämtlicher Diagonalen? Wie groß ist das arithmetische Mittel der Winkel?

8) In einem Polygon gehen von jeder Ecke 12 (p) Diagonalen aus; wie groß ist die Anzahl der möglichen Diagonalen?

9) Ein Vieleck wird durch die Diagonalen von einer Ecke aus in 8 (p) Dreiecke zerlegt; wie viele Ecken hat das Vieleck? welches ist die Zahl der Diagonalen? wie groß ist durchschnittlich ein Winkel?

10) In einem n Eck beträgt die Anzahl der Diagonalen von einer Ecke aus mit der Anzahl der Seiten 21; wie viele Diagonalen hat dasselbe und wie groß ist durchschnittlich ein Winkel?

11) Die Winkelsumme eines n Eckes beträgt 1620°; wie viele Diagonalen hat dasselbe?

12) In einem Vielecke mißt ein Winkel durchschnittlich 156° [162°); welches ist die Anzahl der Diagonalen?

13) In welchem Polygone ist die Anzahl der Diagonalen so groß als die der Seiten?

14) In einem n Eck beträgt die Anzahl der Diagonalen von einer Ecke aus mit der Anzahl der Seiten 21; welches ist die Anzahl sämtlicher Diagonalen?

---

15) ABCDE sei ein gleichseitiges und gleichwinkliges Fünfeck Zeige, daß dasselbe durch die Diagonalen AD und BE in drei gleichschenklige Dreiecke und eine Raute zerlegt wird.

16) Im gleichseitigen und gleichwinkligen Sechseck ABCDEF wird die Diagonale AC von den Diagonalen BD und BF in drei gleiche Teile geteilt.

17) Ein Parallelogramm wird von einer Geraden, welche durch den Schnittpunkt der Diagonalen geht, in zwei kongruente Trapeze zerlegt.

Wie wird ein Parallelogramm durch eine Gerade, welche durch einen gegebenen Punkt geht, in zwei kongruente Teile zerlegt?

18) Wann sind Parallelogramme [Rechtecke, Rauten, Quadrate] kongruent?

19) Zwei Trapeze sind kongruent, wenn sie in den Parallelen und in den der größeren Parallelen anliegenden Winkeln übereinstimmen.

20) In einem gleichschenkligen Dreiecke ist die Höhe hergestellt und eine Parallele zur Grundlinie gezogen; zu zeigen, daß 2 kongruente Trapeze entstanden sind.

VII. Anhang.

Geometrische Konstruktionen.

Eine geometrische Konstruktionsaufgabe enthält die Forderung ein geometrisches Gebilde so herzustellen, daß es gewissen gegebenen Bedingungen genügt. Man bedient sich bei den Konstruktionen des Lineals und des Zirkels; des Lineals, um zwei Punkte durch eine Gerade zu verbinden; des Zirkels, um mittels desselben um einen gegebenen Punkt mit einem gegebenen Radius einen Kreis zu beschreiben. Die Möglichkeit dieser Konstruktionen wird vorausgesetzt. (Postulate).

Eine Konstruktionsaufgabe besteht aus vier Teilen: der Analysis, der Konstruktion, dem Beweise und der Determination.

Die Analysis untersucht die Abhängigkeit des gesuchten Gebildes von den gegebenen Bedingungen. Man zeichnet zu diesem Zwecke die gesuchte Figur willkürlich und konstruiert in derselben diejenigen Elemente, welche eine gegebene Größe oder Lage haben sollen.

Meistens hängt die Konstruktion von der Bestimmung eines Punktes ab. Zur Festlegung eines solchen sind zwei Bedingungen erforderlich. Berücksichtigt man nur eine von zwei gegebenen Bedingungen, so wird der Punkt unbestimmt. Aber die Punkte, welche der einen Bedingung genügen, erfüllen in ihrer Gesamtheit eine Linie, einen geometrischen Ort. Liefert jede der zwei Bedingungen eine Gerade oder einen Kreis als geometrischen Ort für den gesuchten Punkt, so kann dieser nur ein gemeinsamer Punkt beider Ortslinien sein.

Oft vereinfacht sich die Auflösung einer Aufgabe durch Zurückführung auf eine bekannte.

Die Konstruktion stellt die gesuchte Figur nach Angabe der Analysis her.

Der Beweis zeigt, daß die gezeichnete Figur die verlangten Eigenschaften hat.

In der Determination werden die Bedingungen für die Möglichkeit der Aufgabe und die Zahl der Lösungen angegeben.

Aufgaben.

1) **Einen Punkt zu suchen, welcher von zwei gegebenen Punkten A und B gleiche Entfernungen hat.**

Beschreibe mit irgend einer Zirkelöffnung, welcher größer ist als $\frac{1}{2}$ AB um A und B Kreisbogen. Der Schnittpunkt beider Kreisbogen hat die verlangte Eigenschaft.

Es gibt unendlich viele Punkte von der geforderten Eigenschaft.

2) **Die Mittelsenkrechte einer Strecke zu zeichnen oder eine Strecke zu halbieren.**

Konstruiere irgend zwei Punkte, welche von den Endpunkten der gegebenen Strecke gleichweit entfernt sind.

3) Eine Strecke in 4, 8, ... 2^n gleiche Teile zu teilen.

4) **Einen Punkt zu bestimmen, welcher von drei gegebenen Punkten A, B, C gleiche Entfernungen hat, oder durch drei gegebene Punkte einen Kreis zu legen.**

Analysis. Weil die Abstände des gesuchten Punktes M von A und B gleich sein sollen, ist die Mittelsenkrechte von AB eine Ortslinie für den Punkt, und weil MB = MC sein soll, ist die Mittelsenkrechte von BC eine zweite Linie, auf welcher M liegen muß. Der gesuchte Punkt ist somit der Schnittpunkt von zwei Mittelsenkrechten.

Bemerkungen. 1) Welche zwei der drei Strecken AB, BC, CA senkrecht halbiert werden, ist nach 104 gleichgiltig. Es gibt nur einen Punkt, welcher der gestellten Bedingung genügt.

2) Liegen die drei Punkte A, B, C auf einer Geraden, so laufen die Mittelsenkrechten parallel. Keine Lösung.

3) Zwei Kreise können sich nur in zwei Punkten schneiden; denn hätten sie drei Punkte gemeinsam, so würden sie sich decken.

4) Eine Gerade kann einen Kreis höchstens in zwei Punkten treffen.

5) **Auf eine gegebene Gerade von einem gegebenen Punkte außerhalb derselben die Senkrechte zu fällen.**

Auflösung. Man beschreibt um den Punkt, P, einen Kreisbogen, welcher die Geraden in zwei Punkten, A und B, schnei-

det und zeichnet einen Punkt D, welcher von A und B gleiche Entfernungen hat. PD ist die gesuchte Senkrechte.

Beweis. PD ist die Mittelsenkrechte von AB.

6) Einen gegebenen Winkel zu halbieren.

Man schneidet auf den Schenkeln des Winkels gleiche Strecken ab, AB = AC, und konstruiert einen Punkt D, welcher von B und C gleichweit entfernt ist. Beweis?

7) In einem gegebenen Punkte einer Geraden die Senkrechte zu errichten.

Lösungen. a) Der gegebene Punkt ist Scheitel eines gestreckten Winkels, welcher nach 6 halbiert werden kann.

b) Ist der gegebene Punkt ein Endpunkt der gegebenen geraden Linie und läßt sich diese nach der einen Seite hin nicht hinreichend verlängern, so schneidet man von dem gegebenen Punkte A aus auf der Geraden eine beliebige Strecke AB ab, errichtet über AB ein beliebiges gleichschenkliges Dreieck ABC, verlängert den Schenkel BC über C hinaus um sich selbst und verbindet den erhaltenen Punkt D mit A. DA $\perp$ AB.

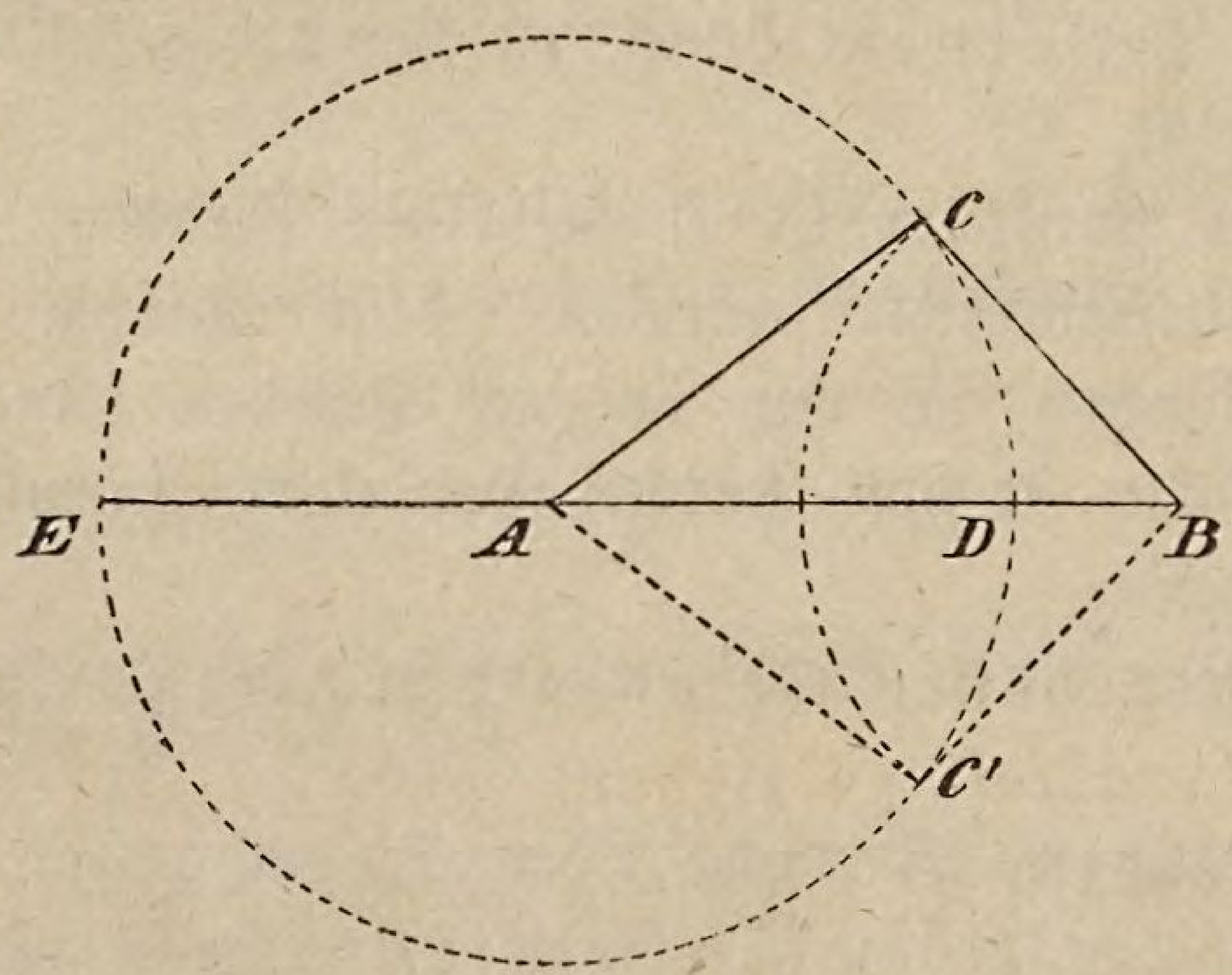
Beweis. A. 37 auf Seite 35.

8) Einen Winkel von 45°, $22\frac{1}{2}^\circ$, 135° zu zeichnen.

9) Die Höhen eines spitzwinkligen und eines stumpfwinkligen Dreieckes zu konstruieren.

10) Ein Dreieck zu konstruieren, welches drei gegebene Strecken a, b, c zu Seiten hat.

Analysis. Die Lage des Dreieckes ist willkürlich.



Wird c = AB festgelegt, so ist noch die dritte Ecke C zu bestimmen. Der Abstand dieses Punktes von A soll gleich b und dessen Abstand von B gleich a sein. Wegen der ersten Bedingung muß C auf dem um A mit dem Radius b beschriebenen Kreise liegen, und wegen der zweiten auf dem um B mit dem Radius a konstruierten Kreise. C ist somit ein gemeinsamer Punkt dieser zwei Ortslinien.

Determination. Aus 3 Strecken a, b, c kann nur dann ein Dreieck konstruiert werden, wenn jede derselben größer ist als die Differenz und kleiner als die Summe der beiden andern. Ist diese Bedingung erfüllt, so schneiden sich die Kreise A und B in zwei Punkten. Konstruiert man nämlich auf AB die zwei Punkte D und E, deren Abstände von B bez. gleich $c - b$ und $c + b$ sind, so liegt D innerhalb und E außerhalb des Kreises B; der Kreis um A, welcher D mit E verbindet, muß daher den Kreis um B in 2 Punkten, C und C′, schneiden. — $\triangle ABC \cong ABC'$. Eine Lösung.

Ist $c = a \pm b$, so haben die Kreise A und B nur einen Punkt auf AB gemeinsam; wenn $c < a - b$ oder $c > a + b$ ist, so haben die Kreise keinen Punkt gemeinsam.

$a = 40$ mm; $b = 50$ mm; $c = 60$ mm.
$a = 30$; $b = 40$; $c = 50$. $a = 20$; $b = 30$; $c = 40$.
$a = 20$; $b = 10$; $c = 30$. $a = 20$; $b = 50$; $c = 30$.
$a = 20$; $b = 60$; $c = 30$. $a = 20$; $b = 70$; $c = 30$.

11) Ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen, dessen Basis $= a$ und dessen Schenkel $= b$ sind.

12) Ueber einer gegebenen Strecke ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren.

13) Einen Winkel von 60°, 30°, 15° zu zeichnen.

14) Einen gegebenen Winkel an eine gegebene Gerade anzutragen, so daß ein gegebener Punkt dieser Geraden Scheitel wird.

Auflösung. Man schneidet auf den Schenkeln des gegebenen Winkels gleiche Strecken ab und bringt das erhaltene gleichschenklige Dreieck in die verlangte Lage. A. 10.

15) Zu zwei Winkeln α und β eines Dreieckes den dritten zu konstruieren.

16) Zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt die Parallele zu ziehen.

Auflösung. 1) Man zieht durch den gegebenen Punkt P irgend eine Gerade, welche die gegebene Gerade AB in einem Punkte, C, schneidet, und trägt an PC in P $\wedge$ PCA als Wechsel- oder Gegenwinkel an.

2) Man konstruiert eine Raute, von welcher eine Ecke in P und eine Seite auf AB zu liegen kommt.

17) Den geometrischen Ort für die Endpunkte der Strecken zu konstruieren, welche von einer gegebenen Geraden in gegebener Richtung ausgehen und eine gegebene Länge haben.

18) Ein Dreieck aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel zu konstruieren.
$\alpha = 30^0$; b = 45; c = 60. $\alpha = 90^0$; b = 30; c = 55.

19) Ein Dreieck aus einer Seite (a) und den anliegenden Winkeln (β, γ) zu konstruieren. $\beta + \gamma < 2$ R.
a = 60; $\beta = 30^0$; $\gamma = 45^0$. a = 50; $\beta = 60^0$; $\gamma = 90^0$.

20) Ein Dreieck aus einer Seite a, einem anliegenden β und dem gegenüberliegenden Winkel α zu konstruieren. $\alpha + \beta < 2$ R.
a = 45; $\beta = 60^0$; $\gamma = 45^0$. a = 60; $\beta = 75^0$; $\gamma = 30^0$.

21) Ein Dreieck aus zwei Seiten (a, c) und dem der einen Seite gegenüberliegenden Winkel (α) zu konstruieren.

Analysis. Schneidet man auf einer beliebigen Geraden c = AB ab und trägt in A den Winkel α an, so ist der zweite Schenkel AX dieses Winkels ein Ort für die dritte Ecke. Ein zweiter Ort ist die um B mit dem Radius a beschriebene Kreislinie.

Determination Je nachdem der Kreis den Strahl AX in zwei, in einem oder in keinem Punkte schneidet, gibt es zwei, eine oder keine Lösung.

Es sei BD die Senkrechte von B auf AX.

Ist a < BD, so schneidet der Kreis B den Strahl AX nicht und es gibt keine Lösung.

Wenn a = BD ist, so hat die Aufgabe nur eine Lösung, △ ABD.

Ist a > BD, aber a < c, so schneidet der Kreis den Strahl AX in zwei Punkten, C und C′. Die Dreiecke ABC und ABC′ genügen beide den gestellten Forderungen.

Ist a > c, so schneidet der Kreis den Strahl AX in einem Punkte; der zweite Schnittpunkt des Kreises mit der Geraden AX fällt auf die Rückverlängerung von AX. Ein Dreieck.

$\alpha = 30^0$, c = 40, a = 60; 40; 30; 20; 15.

22) Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren aus der Hypotenuse a und einem spitzen Winkel β.

Auflösung. 1) A. 20.

2) Hat man **a** = BC hingelegt, so sind der Halbkreis über BC und die durch B unter dem Winkel β gegen BC gezogene Gerade zwei Ortslinien für die dritte Ecke A. A. 37 im III. Anhang.

23) Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren aus der Hypotenuse a und einer Kathete b.

1. Auflösung. Aufgabe 21.

2. Auflösung. Ist BC = a gemacht, so erhält man die dritte Ecke A als Durchschnitt des Halbkreises über BC und des um C mit dem Radius b konstruierten Kreises.

24) Auf einer gegebenen Geraden einen Punkt zu bestimmen, welcher von zwei gegebenen Punkten (außerhalb derselben) gleichweit absteht.

25) Über zwei der Größe und Lage nach gegebenen Strecken zwei gleichschenklige Dreiecke mit gemeinschaftlicher Spitze zu konstruieren.

26) Zwei gleiche Strecken sind der Lage und Größe nach gegeben. Es sollen über denselben kongruente Dreiecke mit gemeinschaftlicher Spitze konstruiert werden.

27) Einen Punkt zu konstruieren, welcher von zwei gegebenen Punkten gleichen und von einem dritten Punkte einen gegebenen Abstand hat.

28) Den geometrischen Ort der Punkte zu konstruieren, welche von zwei gegebenen Geraden gleichweit entfernt sind.

Unterscheide, ob die Geraden sich schneiden oder parallel sind.

29) Drei Gerade, welche sich nicht in einem Punkte schneiden, sind gegeben. Es soll ein Punkt konstruiert werden, dessen Abstände von den drei Geraden gleich sind.

Wie viele solche Punkte gibt es?

30) Auf einer gegebenen Geraden einen Punkt zu bestimmen, welcher von einer zweiten gegebenen Geraden einen gegebenen Abstand hat.

31) Einen Punkt zu konstruieren, welcher von zwei gegebenen Geraden gegebene Entfernungen (a, b) hat.

In den folgenden Aufgaben bezeichnen α, β, γ die Winkel eines Dreieckes ABC; a, b, c bez. die Seiten BC, AC, AB; h_a, h_b, h_c die auf a, b, c gefällten Höhen; m_a, m_b, m_c die Mittellinien zu den Seiten a, b, c; w_a, w_b, w_c die Halbierungslinien der Winkel α, β, γ; p und q die Abschnitte, in welche b durch die zugehörige Höhe geteilt wird, und zwar soll p an a und q an c liegen. $\wedge$ (b m_b) ist der von b und m_b eingeschlossene spitze Winkel.

32) a, b, m_b (in Worten?).

Analysis: Durch b ist der Abstand der Ecken A und C des gesuchten Dreieckes ABC gegeben, ferner der Mittelpunkt D der Seite AC. Die noch zu bestimmende Ecke B liegt, weil BC = a werden soll, auf dem um C mit dem Radius a konstruierten Kreise und, weil DB = m werden soll, auch auf dem um D mit dem Radius m beschriebenen Kreise.

a = 60 mm; b = 50 mm; m_b = 45 mm [35; 90].

33) b, α, h_b. — 50; 75°; 40.*) — 40; 125°; 25.

34) b, α, m_b. — 50; 78°; 31. — 40; 120°; 45.

35) b, α, m_c. — 60; 60°; 53 [45; 60; 65].

36) b, α, w_c. — 55; 50°; 44 [50; 35]. — 60; 115°; 71.

37) b, q, β = 90°. 38) p, q, β = 90°.

39) $\wedge$ (bm_b), m_b, c. — 40°; 45; 32 [45; 50].

40) $\wedge$ (b w_b), w_b, c. — 60°; 50; 45 [50]. — 30°; 40; 25 [20; 18].

41) p, h_b, β. — 42; 36; 60° (40°).

42) p, h_b, w_c. — 60; 30; 31 [50] — 40; 45; 50.

43) α, h_b, w_a. — 75°; 40; 36.

44) α, h_b, h_c. — 70°; 25; 30.

45) α, h_c, p. — 64°; 50; 40. — 120°; 30; 45.

46) α, h_c, q. — 75°; 50; 10. — 30°; 25; 40 [60].

47) α, h_b, m_b. — 70°; 80; 82 [90]. — 40°; 32; 40.

48) α, h_b, w_b. — 60°; 42; 45 [60].

49) a, b, h_b. — 50; 30; 45 [55].

50) h_b, p, q. 51) p, q, γ. 52) α, q, m_b. 53) a, p, q.

54) b, h_a, α. — 55; 45; 70° [30°].

55) b, h_a, m_b. 56) b, h_a, w_c. 57) p, q, h_a.

---

*) Als Längeneinheit ist das Millimeter angenommen.

58) p, γ, h_c. — 40; 30°; 44 [35].
59) a, h_b, h_c. — 50; 30; 45 [25].
60) b, h_b, h_c. 61) b, m_b, h_b. 62) β, h_a, q. 63) $\alpha, h_b, b \pm c$.

64) $a, b + c = s, \gamma$.

Analysis: Verlängert man in dem angenommenen Dreieck ABC die Seite AC = b um die anstoßende Seite AB = c und verbindet den erhaltenen Punkt D mit B, so erhält man ein Hilfsdreieck CDB, welches sich nach A. 18 konstruieren läßt. Die dritte Ecke A des gesuchten Dreieckes ist der Punkt, welchen CD mit der Mittelsenkrechten von BD gemein hat.

$s = 70$; $\gamma = 60°$; $a = 45$ [35; 30; 80].

65*) $a, b - c = d, \gamma$. — $a = 60$; $d = 15$; $\gamma = 40°$.
Trage c auf b von der gemeinschaftlichen Ecke aus ab.
66) $a + b, c, \alpha$. — Verlängere b um a. — 75; 50; 65°.
67) $a - b, c. \alpha$. — 20; 55 [15]; 75°.
Verlängere die kleinere Seite b, bis sie a gleich wird.
68) $a + b, \alpha, \gamma$. — 69) $a - b, \alpha, \gamma$.
70) $a \pm b, \alpha = R, \gamma$. 71) $a + b, \alpha, \beta$. 72) $a - b, \alpha, \beta$.
73) $a, b + c, \alpha$. — 50 [85; 40]; 75; 75°. — 30; 60; 50° [60°; 70°].
Zwei kongruente Dreiecke; vergl. Anh. IV. A. 13.
74) $a, b - c, \alpha$. — 80 [20; 15]; 20; 75°.
75) $a, b - c, \alpha = R$. 76) $a, b + c, \beta - \gamma$.
77) $a, p - q, \gamma$ — 50; 25 [50]; 30°.
78) $a, p - q, \alpha$. 79) $p - q, \alpha, \gamma$. 80) $a, c, p - q$.
81) $a + b, \alpha, h_b$. — 115; 75°; 40. — 100; 120°; 25.
82) $a - b, \alpha, h_b$. — 20; 70°; 60.
83) $a + h_b, p, q$. — 90; 40; 20 [50].
84) $a - h_b, p, q$. — 20; 35; 15 [40].
85) $a + h_b, \gamma, b$. — 85; 30°; 50 [30].
86) $a - h_b, \gamma, b$. — 20; 40°; 50.
87) $a + h_b, \beta, \gamma$. 88) $a - h_b, \beta, \gamma$.
89) $a = b = c, a + h$. 90) $a = b = c, a - h$.

*) In den nachfolgenden Aufgaben ist, wenn notwendig, $a > b > c$ angenommen.

91) $a + h_b, \gamma, m_b$. — 75; 30°; 30 [20; 25; 55].
92) $a - h_b, \gamma, m_b$. — 15; 44°; 36 [40; 55; 30].
93) $a + h_b, \gamma, h_a$. 94) $a - h_b, \gamma, h_a$.
95) $a + h_b, \gamma, h_c$. — 70; 40°; 40 [25].
96) $a - h_b, \gamma, h_c$. — 18; 36°; 42 [30].

97) $a + b + c = u, \alpha, \gamma$. — 125; 80° [120°]; 60° [75°].

Zur Analysis. Verlängert man eine der Seiten über beide Endpunkte hinaus um die anstoßenden Seiten und verbindet die konstruierten Punkte mit der gegenüberliegenden Ecke, so erhält man ein Dreieck, von welchem die Winkel und eine Seite bekannt sind.

98) $a + b + c$, $\alpha = R$, γ.
99) $a + b + c$, $\alpha = R$, $b = c$.
100) $a + b + c$, α, h. — 100; 60°; 30.
101) $a + b - c$, α, γ. — 70; 76°; 44°.
102) $a + b - c$, γ, h_b. — 75; 40°; 38. — 15; 120°; 25.

---

103. In einem Dreieck eine Parallele zu einer Seite so zu ziehen, daß der obere Abschnitt der einen geschnittenen Seite dem unteren Abschnitte der anderen gleich wird.

Analysis. Es sei $XY \parallel AC$ und $BX = CY$. Man denke sich YC parallel zur ursprünglichen Lage verschoben, so daß Y auf X zu liegen kommt. Punkt C fällt jetzt in einen Punkt D auf BC, welcher sich konstruieren läßt.

104—112) Zwei Seiten AB und BC durch eine Transversale in X und Y so zu schneiden, daß

104) $XY = l$ und $BX = YC$; (nach Parallelverschiebung von YC in die Lage XD sind für D zwei Örter zu suchen;)
105) $XY \perp AC$ und $BX = YC$;
106) $XY \parallel AC$ und $BX + YC = s$;
107) $XY \parallel AC$ und $YC - BX = d$;
108) $XY \parallel AC$ und $CY + AX = s$;
109) $XY = l$ und $CY \pm BX = s$;
110) $XY \perp BC$ und $YC \pm BX = s$;
111) $BX = XY = YC$;
112) $BX = XY$ und $BY = AX$.

113—115) Ein Quadrat zu konstruieren:

113) aus der Diagonale;
114) aus der Summe der Diagonale und Seite;
115) aus der Differenz der Diagonale und Seite.

116—121) Ein Rechteck zu konstruieren:

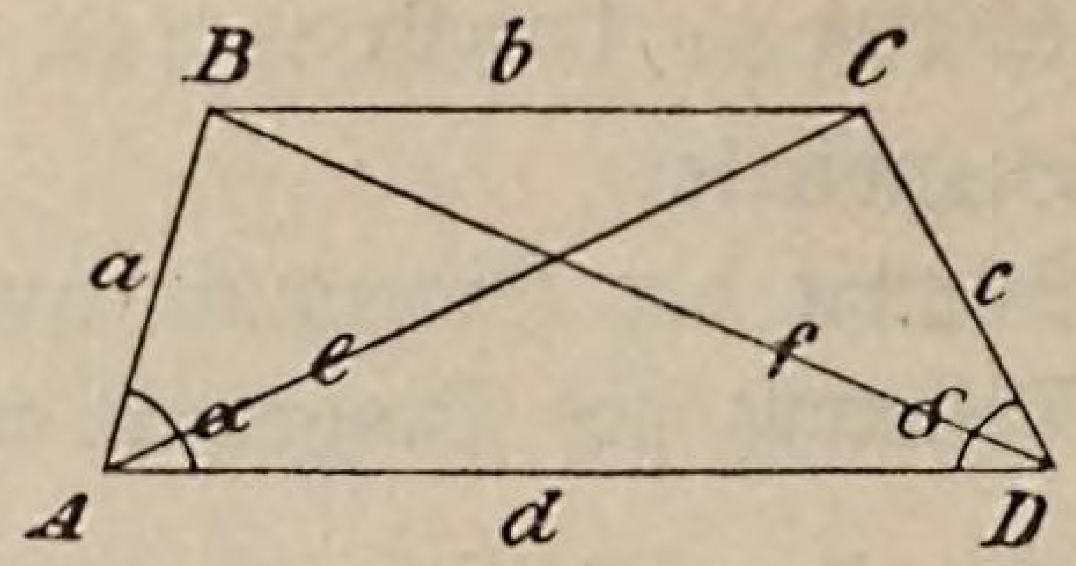
116) aus einer Seite und der Diagonale;
117) aus einer Seite und dem gegenüberliegenden Winkel der Diagonalen;
118) aus der Diagonale und dem Umfang;
119) aus einer Seite und der Summe der Diagonale und der anderen Seite;
120) aus einer Seite und der Differenz der Diagonale und und der anderen Seite;
121) aus einem Winkel der Diagonalen und der Summe der Seiten und Diagonalen.

122—125) Eine Raute zu konstruieren:

122) aus den Diagonalen;
123) aus der Seite und der Höhe;
124) aus der Seite und der Summe der Diagonalen;
125) aus der Seite und der Differenz der Diagonalen.

126—133) Ein Parallelogramm zu konstruieren:

126) aus einer Seite, einem spitzen Winkel und der größeren Diagonale;
127) aus einer Seite, einem spitzen Winkel und der kleineren Diagonale;
128) aus einer Seite und den beiden Höhen;
129) aus den Höhen und einer Diagonale;
130) aus einer Seite und den Diagonalen;
131) aus einer Seite, der Summe der Diagonalen und dem von den Diagonalen gebildeten Winkel;
132) aus einer Seite, der Differenz der Diagonalen und dem von den Diagonalen gebildeten Winkel;
133) aus einem Winkel, der gegenüberliegenden Diagonale und dem Umfang.



134—145) Ein Trapez zu konstruieren aus:

134) a, b, c, d. — 15; 25; 20; 35; [30].
Durch Parallelverschiebung einer Seite erhält man ein konstruierbares Dreieck.

135) a, b, c, δ. — 25 [20]; 30; 35; 40°; — 35; 40; 30; 60°

136) a, c, d — b, e. — 35; 40; 25; 60 [25].

137) a, e, f, α. — 35; 65; 55; 70°. — 30; 45; 60 [15]; 40°

138) b, e, f, α. — 25; 40 [22]; 35 [15]; 60°.

139) b, d, e, f. — 30; 40; 50; 60.

140) e, f, $\wedge$ (ef), b — 35; 25; 50°; 40.

141) e, f, $\wedge$ (ef), c. — 50; 40; 90°; 35 [45].

142) e, f, b + d, c. — 50; 40; 70; 30 [20; 42].

143) β, a + f, d, e. — 100°; 60; 45; 35.

144) a + b, e, f, $\wedge$ (ef). 145) a — b, e, f, $\wedge$ (ef).

In einem Vierecke ABCD sei AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = e, BD = f, $\wedge$ BAD = α, $\wedge$ ABC = β, u. s. f.

146—155) Ein Viereck zu konstruieren aus:

146) a, b, f, α, β. — 50; 30; 35 [60]; 40°; 120°.

147) a, b, c, e, $\wedge$ (af). — 40; 30; 25; 50; 60° [120°].

148) a, d, e, β, $\wedge$ (bf). — 40; 50; 55; 90°; 25°. — 80; 35; 60; 33°; 13°.

149) a, e, α, γ, δ. — 40; 50; 70°; 120°; 90°. — 80; 70; 105°; 135°; 70°.

150) a, b, e, f, $\wedge$ (ef). — 40; 45; 60; 70; 80°.

151) a, c, f, β, γ. Durch Parallelverschiebung einer Seite. 40; 60; 55 [65]; 140°; 60°.

152) a, c, α, β, γ. — 30 [60]; 50; 90° [120°]; 120°; 100°.

153) a, c, d, β, γ. 154) a, b, c, α, δ.

155) a, e, f, $\wedge$ (ce), $\wedge$ (cf).

VIII. Anhang.

Übungen zu 134—141.

1) Die Hypotenuse eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieckes ist gegen die Kathete inkommensurabel.

Schneidet man auf der Hypotenuse BC die Strecke BA_1 gleich der Kathete BA ab und errichtet $A_1B_1 \perp BC$, so ist $\triangle A_1B_1C$ wieder gleichschenklig und rechtwinklig. Der Rest A_1C ist in der Kathete mehr als zweimal enthalten.

2) Die Seiten eines Dreieckes ABC messen 135, 120, 85mm; durch den Punkt D, welcher AB so teilt, daß $AD : DB = 7 : 3$, ist die Parallele zu BC gezogen. Wie groß sind die Abschnitte auf AC und die parallele Transversale?

3) In einem Dreiecke ABC ist die Höhe BD in E so geteilt, daß $AE : ED = 2 : 3$, und durch E die Parallele zu AC gezogen. Wie groß sind die Abschnitte auf AB und BC und die parallele Transversale, wenn $a = 160$, $b = 130$, $c = 75$ mm?

4) Wenn C die Strecke AB innen nach dem Verhältnisse $m : n = AC : CB$ teilt und durch die drei Punkte A, B, C zu einer Geraden, welche die Strecke AB nicht schneidet, die Parallelen AA′, BB′, CC′ gezogen werden, so ist $CC' = \frac{n}{m+n} \cdot AA' + \frac{m}{m+n} \cdot BB'$.

Wie ändert sich diese Gleichung, wenn die Gerade A′B′C′ die Strecke AB schneidet?

5) Die Höhe eines Trapezes ist nach dem Verhältnisse $m : n$ geteilt und durch den Teilpunkt die Parallele zu den parallelen Seiten gezogen. Diese parallele Transversale und die auf ihr von den Diagonalen gemachten Abschnitte aus den parallelen Trapezseiten a und b zu berechnen.

6) Eine Gerade schneidet die Seiten AB und AC eines Dreieckes in D und E so, daß $\angle$ AED dem Winkel ACB supplementär ist. Beweise, daß $DE : BC = AD : AB$. **137. 80.**

7) Zieht man in zwei Dreiecken von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe in gleichen Abständen von der Spitze je eine Parallele, so sind diese Parallelen gleich.

8) Die Mittellinie zu einer Dreiecksseite halbiert jede zu dieser parallele Transversale.

9) Eine Strecke AB = 10cm ist in zehn gleiche Teile geteilt und die Teilpunkte sind mit einem Punkte C, dessen Abstand von AB = 10cm ist, durch Gerade verbunden. In welcher Entfernung von AB ist eine Parallele zu ziehen, damit auf ihr von den Verbindungslinien zehn gleiche Strecken von 1cm [4cm; 15cm] Länge abgeschnitten werden?

10) Wenn A, B, C drei aufeinander folgende Punkte einer Geraden sind, BD und CE gleiche Richtungen und solche Längen haben, daß BD : CE = AB : AC, so liegen auch A, D, E auf einer Geraden.

Bezeichnet man den Schnittpunkt von CE und der Geraden, welche A mit D verbindet, mit X, so ist CX = CE nachzuweisen.

Liegt der Punkt zwischen B und C, so gilt der Satz, wenn BD und CE entgegengesetzt gerichtet sind.

11) Die Strecke, welche die Mitten zweier Dreiecksseiten verbindet, ist zur dritten Seite parallel und gleich der Hälfte derselben.

12. Ein Dreieck wird durch die Strecken, welche die Mitten der Seiten verbinden, in vier kongruente Dreiecke zerlegt.

13) Die Geraden, welche die Mitten der aufeinander folgenden Seiten eines Viereckes verbinden, schließen ein Parallelogramm ein. Dieses ist rechtwinklig, wenn die Diagonalen des Vierecks aufeinander senkrecht stehen; gleichseitig, wenn die Diagonalen des Vierecks gleich sind.

Welches Parallelogramm erhält man, wenn man die Mitten der Seiten einer Raute, eines Rechteckes oder eines Quadrates verbindet?

14) Verbindet man die Mitten der Diagonalen eines Viereckes mit den Mitten zweier Gegenseiten, so erhält man ein Parallelogramm.

15) In einem Vierecke schneiden sich die Verbindungslinien der Mitten der Gegenseiten und der Mitten der Diagonalen in einem Punkte. (Benütze die vorige Aufgabe und **123**,1.)

16) Werden die Seiten eines Viereckes von zwei Gegenecken aus nach demselben Verhältnisse (m : n) geteilt, so sind die konstruierten Punkte die Ecken eines Parallelogrammes.

17) In welche Abschnitte werden die drei Seiten a, b, c eines Dreieckes durch die Halbierungslinien der Innen- und Außenwinkel geteilt? $a = 9$; $b = 7$; $c = 5$.

18) Die Halbierungslinie eines Dreieckswinkels teilt die Gegenseite in zwei Abschnitte von 15 und 35 mm Länge; wie groß sind die zwei anderen Seiten, wenn ihre Summe 80 mm beträgt?

19) Das Verhältnis, nach welchem die Winkelhalbierenden eines Dreieckes durch ihren Schnittpunkt geteilt werden, aus den Seiten (a, b, c) zu bestimmen.

20) AB wird durch die Punkte C und D innen und außen nach dem Verhältnisse m : n geteilt. Bestimme die Werte der Verhältnisse:

a) AC : AB; b) BC : AB; c) BD : AB; d) AD : AB; e) AC : AD; f) BC : BD; g) AC : CD; h) AD : CD; i) BC : CD; k) BD : CD; l) AB : CD.

21) Ist AB in C und D harmonisch geteilt, so ist

a) $\frac{1}{AB} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}\right)$; b) $\frac{1}{CD} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{AD} + \frac{1}{BD}\right)$;

c) $\frac{1}{AB} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{BC} - \frac{1}{BD}\right)$; d) $\frac{1}{CD} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{BC} - \frac{1}{AC}\right)$.

22) Werden die Punkte A und B von C und D harmonisch getrennt und ist M die Mitte von AB, so ist MC : MA = MA : MD.

23) Wird zu einem von vier harmonischen Strahlen eine Parallele gezogen, so halbiert der ihm zugeordnete Strahl die von den beiden anderen begrenzte Strecke auf der Parallelen.

Sind die vier harmonischen Punkte A, B; C, D mit S verbunden und ist EF || SA, so ziehe durch B die Parallele zu SA.

24) Eine Gerade wird durch vier harmonische Strahlen in vier harmonischen Punkten geschnitten. — Zum Beweise ziehe durch einen Punkt die Parallele zu dem Strahle, welcher durch den zugeordneten Punkt geht. 23.

25) Wenn zwei zugeordnete Strahlen aufeinander senkrecht stehen, so halbieren sie die Winkel, welche die beiden anderen Strahlen bilden. — Ziehe zu einem der beiden ersteren Strahlen eine Parallele. A. 23. 87. I. Anh., A. 12.

26) Jeder Punkt, dessen Abstände von zwei gegebenen Punkten ein gegebenes Verhältnis haben, liegt auf einer Kreislinie; der Durchmesser dieses Kreises ist der Abstand der beiden Punkte, welche die Verbindungsstrecke der gegebenen Punkte innen und außen nach dem gegebenen Verhältnisse teilen.

Beweis. Werden die gegebenen Punkte A und C innen in D und außen in D' nach dem gegebenen Verhältnisse geteilt und ist B irgend einer der gesuchten Punkte, so ist $\wedge$ DBD' = R (141, Umk.; I. Anh. 10). Folglich liegt B auf dem Kreise über dem Durchmesser DD' (III. Anh., A. 37).

Umgekehrt: Wenn AD : DC = AD' : D'C und B irgend ein Punkt des Kreises über dem Durchmesser DD' ist, so verhält sich AB : BC = AD : DC. Denn zieht man durch C CE || DB und CE' || D'B, so folgt aus der Voraussetzung, nach 137 und Satz 36 in Anhang III, BE = BC = BE'. 53. 80. 141.

Der geometrische Ort für die Punkte, deren Abstände von zwei gegebenen Punkten ein gegebenes Verhältnis haben, ist ein Kreis. Der Durchmesser desselben ist der Abstand der Punkte, welche die Verbindungsstrecke der gegebenen Punkte innen und außen nach dem gegebenen Verhältnisse teilen.

---

27) Die Ecken eines Dreieckes ABC werden mit einem Punkte S durch Gerade verbunden und die Strecken SA, SB, SC (innen oder außen) in A', B', C' nach demselben Verhältnisse geteilt. Beweise, daß die Dreiecke A'B'C' und ABC paarweise parallele Seiten haben und in den Winkeln und im Verhältnisse der Seiten übereinstimmen.

Der Satz gilt auch für Polygone und S kann innerhalb oder außerhalb des Vieleckes, auch auf einer Seite oder in einer Ecke liegend angenommen werden.

28) Wird ein Punkt S mit den Ecken eines Dreieckes ABC verbunden und schneidet die Parallele, welche durch einen beliebigen Punkt A' auf SA zu AB gezogen wird, SB in B' und die Parallele durch A' zu AC die Gerade SC in C', so ist B'C' || BC. Erweiterung für das n Eck.

IX. Anhang.

Übungen zu 142—160.

1) Auf einer Karte haben drei Orte A, B, C die Entfernungen AB = 130 mm, BC = 190 mm, AC = 200 mm. Wie viele Kilometer beträgt die natürliche Entfernung dieser Orte, wenn der Maßstab der Karte = $\frac{1}{200000}$ ist?

2) Drei Orte A, B, C werden auf einer Karte eingezeichnet. Es ist AB = 15 km, BC = 20 km und AC = 24 km. Welches ist der Maßstab der Karte und wie groß sind die Entfernungen AB und BC auf der Karte, wenn die verjüngte Strecke AC = 120 mm ist?

3) Auf dem Felde wird ein Dreieck ABC abgesteckt und AB = 350 m, BC = 300 m, AC = 275 m gemessen. Das Dreieck nach dem Verhältnisse 1 : 5000 [1 : 10000; 1 : 2500] zu zeichnen.

4) Um die Entfernung eines unzugänglichen Punktes A von dem Punkte B zu bestimmen, hat man den Abstand des B von einem dritten Punkte C, und die Winkel ABC und ACB gemessen, sodann das Dreieck ABC nach einem verjüngten Maßstabe gezeichnet. Wie weit ist A von B und C entfernt, wenn BC = 150m und die Seiten A'B', B'C', C'A' des abgebildeten Dreieckes ABC 135, 200, 148 mm messen?

5) Der horizontale Schatten eines Turmes wurde gleich 36,3 m und gleichzeitig der Schatten eines lotrechten Stabes von 1 m Länge gleich 0,55 m gemessen. Berechne die Höhe des Turmes.

6—7) Gleichschenklige Dreiecke sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen:

6) in einem Winkel;

7) in dem Verhältnisse der Basis zum Schenkel.

8) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn die Seiten des einen bezüglich senkrecht stehen auf den Seiten des andern.

9) Zwei Dreiecke, welche in einem Winkel und in dem Verhältnisse der zu den einschließenden Seiten gehörigen Höhen übereinstimmen, sind ähnlich.

10) Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in dem Verhältnisse der drei Höhen übereinstimmen.

11) In ähnlichen Dreiecken verhalten sich
a) zwei homologe Höhen,
b) zwei homologe Mittellinien,
c) zwei homologe Winkelhalbierende
wie zwei homologe Seiten.

12) Werden durch entsprechende Ecken ähnlicher Dreiecke Gerade gezogen, welche die Gegenseiten nach demselben Verhältnisse teilen, so sind die Teildreiecke paarweise ähnlich.

13) In ähnlichen Dreiecken verhalten sich die Abstände
a) der Schnittpunkte der Winkelhalbierenden,
b) der Schwerpunkte,
c) der Schnittpunkte der Mittelsenkrechten,
d) der Höhenschnittpunkte
von homologen Ecken oder Seiten wie zwei gleichliegende Seiten.

14) Welche Proportion besteht zwischen den Strecken, in welche zwei Höhen durch ihren Schnittpunkt geteilt werden?

15) Die Höhen aus zwei Ecken eines Dreieckes verhalten sich wie die Abstände ihrer Fußpunkte von der dritten Ecke.

Wie verhalten sich letztere Strecken zu den Seiten, auf welchen sie liegen?

Zeige, daß der Satz auch für ein stumpfwinkliges Dreieck gilt.

16) Von jedem Dreieck wird durch die Verbindungslinie zweier Höhenfußpunkte ein Dreieck abgeschnitten, welches dem ganzen Dreieck ähnlich ist. 15.

17) Sind in einem spitzwinkligen Dreiecke die Fußpunkte der drei Höhen verbunden, so werden die Winkel des Fußpunktendreieckes durch die Höhen halbiert.

Wie ändert sich dieser Satz für das stumpfwinklige Dreieck?

18) Die Diagonalen eines Trapezes teilen einander im Verhältnisse der parallelen Seiten.

19) Durch den Schnittpunkt der Diagonalen eines Trapezes ist zu den parallelen Seiten die Parallele gezogen. Bestimme das Verhältnis, nach welchem die nicht parallelen Seiten durch die Transversale geteilt werden, und die Abschnitte auf der Transversale aus den parallelen Seiten a und b.

20) Zwei Seiten eines Dreieckes werden von ihrem gemeinschaftlichen Endpunkt aus in dem Verhältnisse m : n geteilt

und jeder Teilpunkt mit der gegenüberliegende Ecke verbunden. In welchem Verhältnisse werden die Verbindungsstrecken durch ihren Schnittpunkt geteilt?

21) Die Summe der drei Mittellinien eines Dreieckes ist größer als drei Viertel des Umfanges und kleiner als der ganze Umfang.

22) Ein Dreieck, in welchem zwei Mittellinien gleich sind, ist gleichschenklig.

23) In einem Dreieck ist der Abstand des Schwerpunktes von einer Seite gleich dem dritten Teil der parallelen Höhe.

24) Die Parallele durch den Schwerpunkt zu einer Dreiecksseite beträgt zwei Drittel der parallelen Seite.

25) Der Schwerpunkt eines Dreieckes ABC ist auch der Schwerpunkt des Dreieckes, dessen Ecken die Mitten A', B', C' der Seiten des Dreieckes ABC sind.

26) Der Abstand des Schwerpunktes eines Dreieckes von einer Geraden, welche das Dreieck nicht schneidet, ist das arithmetische Mittel der Abstände der Ecken von derselben.

VIII. Anh., A. 4.

Wie lautet der Satz, wenn die Gerade zwei Dreiecksseiten schneidet, und insbesondere, wenn sie durch den Schwerpunkt geht?

27—29) In dem rechtwinkligen Dreiecke ABC sei a die Maßzahl der Hypotenuse, h die Höhe, p der an b und q der an c liegende Hypotenusenabschnitt.

27) Berechne von den 6 Strecken a, b, c, h, p, q die unbekannten aus:

α) $b = 20$; $p = 15$. β) $h = \frac{2}{5}$; $q = \frac{3}{10}$. γ) $p = 16$; $q = 9$. δ) $a = 1\frac{2}{3}$; $p = 1\frac{1}{3}$. ε) $b = 4$; $c = 3$.

28) α) $b = 41$; $p = 9$. β) $a = 137$; $b = 105$. γ) $h = 10{,}5$; $p = 8{,}8$. δ) $a = 155$; $p = 99{,}2$. ε) $h = 3{,}96$; $c = 4{,}45$.

(Die Resultate sind zum teil irrational) 1).

29) Beweise die Gleichungen:

α) $a^2 = b^2 + c^2$. β) $b^2 : c^2 = p : q$. γ) $a : b = c : h$

δ) $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

30) Durch dic Ecke A eines Dreieckes ABC ist eine Transversale AD so gezogen, daß $\wedge$ BAD = $\wedge$ C. Beweise, daß die Seite AB das geometrische Mittel ist zwischen der Seite BC und ihrem Abschnitte BD. ($\alpha \gtreqless$ R.)

31) Durch die Ecke A eines Dreieckes ABC sind zwei Gerade AD und AE so gezogen, daß $\wedge$ BAD = $\wedge$ C und $\wedge$ CAE = $\wedge$ B ist. Die Strecken AD und AE sind gleich und jede von ihnen ist das geometrische Mittel zwischen den Abschnitten BD und CE.

Von welchen Sätzen sind 30 und 31 Erweiterungen?

32) In einem gleichschenkligen Dreiecke sind die Schenkel auf der Grundlinie von deren Endpunkten aus abgetragen und die erhaltenen Punkte mit der Spitze verbunden. Diese Verbindungsstrecken sind gleich und jede ist das geometrische Mittel zwischen dem Schenkel des gegebenen Dreieckes und dem Abstand der konstruierten Punkte.

Wann fallen die so konstruierten Punkte auf die Grundlinie und wann auf die Verlängerung derselben?

33) Ist in einem Dreiecke eine Höhe das geometrische Mittel zwischen den Abschnitten, in welche sie die zugehörige Seite (innen) teilt, so ist das Dreieck rechtwinklig.

34) Bilden die Seiten eiues rechtwinkligen Dreieckes eine stetige Proportion, so ist die kleinere Kathete dem der größeren Kathete anliegenden Hypotenusenabschnitte gleich.

---

35) Schneidet eine Gerade die drei Seiten eines Dreieckes oder ihre Verlängerungen, so sind die Produkte je dreier nicht anstoßenden Abschnitte gleich. Wird AB in C′, AC in B′ und BC in A′ geschnitten, so ist AC′ · BA′ · CB′ = AB′ · BC′ · CA′.

Zum Beweise fälle von den drei Ecken auf die Transversale die Senkrechten oder ziehe eine Parallele zu der schneidenden Geraden.

Die Umkehrung läßt sich indirekt beweisen.

36) Zieht man durch einen Punkt einer Vierecks-Diagonale zwei Gerade, so sind die Produkte aus je vier nicht anstoßenden Seitenabschnitten gleich.

37) Zieht man durch einen beliebigen Punkt innerhalb oder außerhalb eines Dreieckes die Ecktransversalen, so sind die Produkte je dreier nicht anstoßenden Seitenabschnitte gleich. 35.

Die Umkehrung wird indirekt bewiesen.

38) Beweise mit Hilfe der Umkehrung von 37 den Lehrsatz **160** und A. 28 im V. Anhang.

39) Die Halbierungslinien zweier Dreieckswinkel und die Halbierungslinie des Außenwinkels an der dritten Ecke schneiden die Seiten in drei Punkten, welche auf einer Geraden liegen. **141.** A. 37 Umkehrung.

---

40) In zwei ähnlichen Vierecken verhalten sich die von den Diagonalenschnittpunkten auf zwei homologe Seiten gefällten Senkrechten wie zwei homologe Seiten oder Diagonalen.

41) In einem Vierecke ABCD ist ein Punkt P beliebig angenommen und in dem ähnlichen Vierecke A'B'C'D' P' so gewählt, daß $\wedge$ P'A'B' = PAB und P'B'A' = PBA. Beweise, daß die Abstände der Punkte P und P' von irgend zwei homologen Ecken oder Seiten sich wie zwei entsprechende Seiten verhalten.

42) Zwei Rechtecke sind ähnlich, wenn sie

a) im Verhältnisse zweier anstoßenden Seiten,

b) im Winkel der Diagonalen übereinstimmen.

43) Zwei Rauten sind ähnlich, wenn sie

a) in einem Winkel,

b) im Verhältnisse der Diagonalen übereinstimmen.

44) Stimmen zwei n Ecke im Verhältnisse von (n — 1) gleichliegenden Seiten und in den (n — 2) von diesen Seiten gebildeten Winkeln überein, so sind sie ähnlich.

45) Zwei n Ecke sind ähnlich, wenn sie im Verhältnisse von (n — 2) unmittelbar aufeinander folgenden Seiten und in (n — 1) gleichliegenden Winkeln übereinstimmen.

46) Sind von zwei ähnlichen Polygonen zwei anstoßende Seiten des einen den homologen Seiten des andern parallel, so sind auch je zwei andere Seiten parallel und die Verbindungslinien homologer Ecken schneiden sich in einem Punkte. Ähnlich liegende Polygone.

Der Schnittpunkt der Verbindungsstrecken homologer Ecken liegt auf diesen selbst oder auf deren Verlängerungen, je nachdem die homologen Seiten entgegengesetzt oder gleichgerichtet sind. Innerer oder äußerer Ähnlichkeitspunkt.

X. Anhang.

Konstruktionsaufgaben.

1) Eine gegebene Strecke in n (3; 5; 7; 10) gleiche Teile zu teilen.

I. Auflösung. Man zieht durch den einen Endpunkt A der gegebenen Strecke AB einen beliebigen Strahl, trägt auf demselben irgend eine Strecke n mal ab und zieht durch die einzelnen Teilpunkte zur Geraden, welche den letzten Teilpunkt mit B verbindet, die Parallelen. — 136.

II. Auflösung. Man trägt auf einer Parallelen zu AB von einem Punkte C aus eine beliebige Strecke n mal ab. Ist der letzte Teilpunkt D und schneiden sich AC und BD in S, so teilen die Geraden, welche S mit den Teilpunkten von CD verbinden, AB in n gleiche Teile. 139.

2) Eine gegebene Strecke innen nach einem gegebenen Verhältnisse (m : n; 5 : 3) zu teilen, oder: zwei Strecken zu konstruieren, deren Summe und Verhältnis gegeben ist. Die Auflösung stützt sich auf 137 (oder 139).

3) Eine gegebene Strecke außen nach einem gegebenen Verhältnisse (m : n; 5 : 3) zu teilen, oder: zwei Strecken zu konstruieren, deren Differenz und Verhältnis gegeben ist.

4) Auf einer Geraden sind drei Punkte A, B, C gegeben; einen vierten X zu konstruieren, so daß AX : CX = AB : BC (X vierter harmonischer Punkt).

5) Drei Punkte A, B, C sind gegeben; durch A eine Gerade so zu ziehen, daß die auf sie von B und C gefällten Senkrechten ein gegebenes Verhältnis haben. — Zwei Lösungen.

6) Eine Strecke in drei Teile zu teilen, die sich verhalten wie a : b : c (2 : 3 : 7; 1 : $1\frac{1}{4}$: $1\frac{1}{2}$).

7) Zu drei gegebenen Strecken a, b, c die vierte Proportionale zu konstruieren. a : b = c : x.

Auflösung. Man trägt auf dem einen Schenkel eines beliebigen Winkels A zuerst AB = a auf, dann auf dem anderen Schenkel AC = b, hierauf auf dem ersten Schenkel BD = c und zieht zur Geraden BC durch D die Parallele. Schneidet diese AC in E, so ist CE = x. — Beweis mit **137, 1.**

Andere Auflösungen stützen sich auf **137**, 2; **137**, 3; **137**, 4 oder **139**.

8) Zu zwei Strecken a und b die dritte Proportionale zu konstruieren. a : b = b : x.

A. 7. — Zwei andere Auflösungen stützen sich auf **158**.

9) Zu zwei gegebenen Strecken a und b die mittlere geometrische Proportionale zu konstruieren. a : x = x : b.

Diese Aufgabe ist nach **158** identisch mit der Aufgabe 37 oder 38 auf Seite 24.

Eine andere Auflösung stützt sich auf Satz 32, IX. Anhang.

Ein Dreieck zu konstruieren, wenn gegeben sind:

10) Die Summe (Differenz) zweier Seiten und die Abschnitte, in welche die dritte Seite durch die Halbierungslinie des gegenüberliegenden Winkels geteilt wird;

11) a, b, a : c (= m : n); 12) a, b + c, b : c;

13) a + b + c, a : b : c; 14) a + c, b — c, a : b.

---

15)*) a : c, b, α (VIII. Anh., A. 26).

16) a : c, p, q. 17) a : c, b, m_b.

18) a : c, b, w_b. 19) a : c, b, β = R.

20) Ein Dreieck zu zeichnen aus den Abschnitten, in welche eine Seite durch die Halbierungslinie des Gegenwinkels geteilt wird, und der zu derselben gehörigen Mittellinie.

21) In einem Dreieck ABC einen Punkt X zu suchen, so daß AX : BX : CX = m : n : p.

---

*) Über die Bezeichnung vgl. S. 68.

22) Zwei Strecken AB und CD sind gegeben; einen Punkt X so zu bestimmen, daß △ ABX ∽ CDX.

---

23) Den geometrischen Ort für die Punkte zu konstruieren, deren Abstände von zwei sich schneidenden Geraden ein gegebenes Verhältnis haben.

Welches ist dieser Ort, wenn die Geraden parallel sind?

24) Einen Punkt zu konstruieren, dessen Abstände von den drei Seiten eines Dreieckes (von drei Geraden) sich wie m : n : p verhalten.

---

25) Den geometrischen Ort für die Punkte zu konstruieren, welche alle von einem gegebenen Punkte nach einer gegebenen Geraden gezogenen Strecken (innen oder außen) nach dem gegebenen Verhältnisse m : n (1 : 2; 3 : 5; 5 : 4) teilen.

26) Durch einen gegebenen Punkt P eine Gerade zu ziehen, welche zwei gegebene Gerade so schneidet, daß die Abstände der Schnittpunkte von P ein gegebenes Verhältnis haben.

27) Zwei Gerade und ein Punkt sind gegeben. Eine dritte Gerade so zu ziehen, daß das von den drei Geraden begrenzte Dreieck den gegebenen Punkt zum Schwerpunkt hat.

28) Ein Punkt, eine Gerade und ein Kreis sind gegeben. Durch den Punkt eine Gerade so zu ziehen, daß die von dem Punkte und der Geraden begrenzte Strecke von dem Kreise nach einem gegebenen Verhältnisse geteilt wird. 25.

Ein Dreieck zu konstruieren aus:

29) α, b, m_a (A. 28). 30) α, h_c, m_a (A. 25).

31) b, h_c, m_a. 32) b, h_b, m_a. 33) m_a, $\wedge$ ($c m_a$), b.

---

34) Ein Dreieck zu konstruieren, von dem die Mitten der drei Seiten gegeben sind.

35) Ein Dreieck zu konstruieren, von dem zwei Ecken und der Schwerpunkt gegeben sind. **160.**

Ein Dreieck zu konstruieren aus:

36) m_a, m_c, b. [159]. — 36; 48; 50 [60].

37) m_a, m_c, a. — 45; 60; 70 [50; 120].

38) m_a, m_c, $\wedge$ (m_a m_c). 39) m_a, m_c, $\wedge$ (m_a b).

40) b, $m_c + m_a$, $\wedge$ (bm_a). — 55; 90; 30°.

41) b, $m_c - m_a$, $\wedge$ (b m_a). — 60; 15; 40°.

42) m_a, m_b, h_b.

43) a, c, m_b. — 80; 60; 50 [70].

Durch Parallelverschiebung von c erhält man ein Dreieck, mit den Seiten a, c, $2m_b$.

44) m_a, m_b, m_c. (A. 43). — 40; 50 [20]; 60.

45) m_a, m_c, h_b. 46) h_a, h_b, m_b.

---

47) Ein Dreieck zu konstruieren aus: α, b : c = m : n, h_a.

Auflösung. Man zeichnet aus α, m, n ein Dreieck A'B'C', in dem $\wedge$ A' = α, A'C' = m, A'B' = n ist. Dieses Dreieck ist dem gesuchten ähnlich. Auf der Höhe A'D' des konstruierten Dreieckes trägt man h_a = A'D ab, zieht durch D die Parallele DB zu D'B' und durch B die Parallele BC zu B'C'. $\triangle$ A'BC ist das gesuchte. — Beweis mit **137**.

Bemerkung. Sind zur Konstruktion einer Figur Winkel und Streckenverhältnisse, aber nur die Länge einer Strecke gegeben, so sucht man zunächst unter Vernachlässigung des letztgenannten Bestimmungsstückes eine Figur herzustellen, welche die gegebenen Winkel und Streckenverhältnisse enthält. Diese Figur ist der gesuchten ähnlich. Das Verhältnis der gegebenen Strecke zu der entsprechenden in der Hilfsfigur gibt dann an, wievielmal so groß man jede Seite der gezeichneten Figur nehmen muß, um die gesuchte Figur zu erhalten.

Wird eine Figur unter Beibehaltung der Gestalt so verändert, daß ihre Strecken in dem Verhältnisse p : q größer oder kleiner werden, so nennt man diese Operation, die Figur nach dem Streckenverhältnisse p : q abbilden.

Am einfachsten wird diese Konstruktion, wenn beide Figuren ähnlich liegend d. h. so gezeichnet werden, daß die homologen Seiten parallel sind. Dann sind bei der Abbildung nur Parallele zu ziehen.

48) α, β, m_c. — 75°; 60°; 50mm.

49) α : b, γ, c. — 3 : 2; 45°; 60mm.

50) a : b, γ, w_a. — 2 : $1\frac{1}{2}$; 40°; 45mm.

51) a : b : c, w_a. — 6 : 5 : 4 [3 : 2 : 1]; 70mm.

52) a : b : c, p. — 10 : 8 : 7; 40mm. — 9 : 6 : 4; 70mm.

53) $a : b$, $\alpha = R$, w_b. 54) $a : b$ $(a > b)$, β, m_b.

55) α, β, $a + h_c = s$. Verlängere in dem Hilfsdreieck $A'B'C'$ die Höhe $A'D'$ um $B'C' = D'E'$, trage auf $A'E'$ $s = A'E$ ab und bilde $\triangle$ $A'B'C'$ nach dem Verhältnisse $A'E : A'E'$ ab.

56) α, β, $a - h_c = d$. 57) α, β, $h_a + h_b$.

58) α, β, $h_c + m_c$. 59) $a : b$, γ, $a + b + c$.

60) $a : b : c$, $a - h_c$. 61) $a : b : c$, $w_a + m_a$.

62) $a : b$, $\alpha = R$, $b + c - a$.

63) $h_a : h_b$, γ, h_c. 64) $h_a : h_b$, γ, $b + c$.

65) $h_a : h_b : h_c$, m_a.

Ist $h_a : h_b : h_c = m : n : p$, so verhält sich $a : b = n : m$ und $b : c = p : n$. Um das Verhältnis $a : b : c$ zu bestimmen, suche eine Strecke q, so daß $p : n = m : q$. Dann ist $a : b : c = n : m : q$.

Oder: Konstruiere aus m, n, p ein Dreieck; die Höhen desselben verhalten sich wie die Seiten des gesuchten Dreieckes.

66) $h_a : h_b : h_c$, w_a. 67) h_a, h_b, h_c.

68) h_a, h_b, $b = c$. — $h_a = 60\text{mm}$; $h_b = 40\text{mm}$. — $h_a = 40$ mm; $h_b = 50$ mm.

69) α, $p : q$, m_b.

70) $a : h_b$, $c : h_b$, w_a.

71) $h_b : w_b$, β, w_c. 72) $h_b : w_b$, β, $a - c$.

73) α, $h_b : m_b$, h_a. 74) α, $h_b : m_b$, $h_a + w_c$.

75) $a : h_a$, $\alpha = R$, w_b. 76) $a : h_a$, $\alpha = R$, $b + c$.

77) h_a, m_a, $a = c$.

78) Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel, dem Verhältnisse der Abschnitte, in welche die Gegenseite durch die Halbierungslinie des Winkels geteilt wird, und der Höhe aus dem Scheitel des gegebenen Winkels.

79) Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel und den Abschnitten, in welche die Gegenseite durch die Halbierungslinie des Winkels geteilt wird.

80—81) Ein Rechteck zu zeichnen

80) aus der Diagonale und dem Verhältnisse der Seiten;

81) aus dem Umfange und dem Verhältnisse der Diagonale zu einer Seite.

82) Eine Raute zu konstruiren aus dem Umfange und dem Verhältnisse der Diagonalen.

83—86) Ein Viereck zu konstruieren aus den Winkeln, welche die eine Diagonale mit den vier Seiten bildet, und

83) aus der Länge der andern Diagonale;

84) aus einer Seite;

85) aus der Summe (Differenz) der Diagonalen;

86) aus dem Umfange.

87—89) Ein Polygon A'B'C'D'E'.. ist gegeben. Ein diesem ähnliches ABCDE.. zu konstruieren, so daß

87) AB = a; 88) AB + BC = s;

89) AB — BC = d.

90) Ein Polygon und ein Punkt S sind der Lage nach gegeben. Ein zweites gegebenes ähnliches Polygon so zu legen, daß der Punkt S äußerer [innerer] Ähnlichkeitspunkt wird. (IX. Anh., 46.)

---

91) In ein gegebenes Dreieck ABC ein Dreieck einzuschreiben, dessen Seiten gegebenen Geraden parallel sind.

Analysis. Das gesuchte Dreieck sei 𝔄𝔅ℭ. Sieht man von der einen Bedingung, daß 𝔄 auf BC liegen soll, ab, so wird die Aufgabe unbestimmt. Alle diejenigen Dreiecke 𝔄'𝔅'ℭ', deren Seiten den gegebenen Geraden parallel sind, und von denen die Ecken 𝔅' und ℭ' auf AC, bez. AB liegen, bilden ein System von ähnlichen Dreiecken mit parallelen homologen Seiten, und es liegen die dritten Ecken 𝔄' auch auf einer durch A gehenden Geraden. (IX. Anh., A. 46.) Diese Ortslinie für 𝔄 wird daher konstruiert, indem man irgend eines dieser Dreiecke 𝔄'𝔅'ℭ' zeichnet. Die bis jetzt vernachlässigte Bedingung liefert noch einen zweiten Ort, BC, für die Ecke 𝔄 des gesuchten Dreieckes 𝔄𝔅ℭ.

92) In ein gegebenes Dreieck ein gleichseitiges Dreieck so einzuschreiben, daß eine Seite eine gegebene Richtung erhält.

93) In ein gegebenes gleichseitiges Dreieck ein anderes einzuzeichnen, dessen Seiten mit denen des gegebenen einen gegebenen Winkel (z. B. 90^0; 60^0; 45^0) bilden.

94) In ein gegebenes Dreieck ein Quadrat einzuschreiben, d. h. so zu zeichnen, daß auf 2 Dreiecksseiten je eine und auf der dritten zwei Ecken zu liegen kommen.

Eine 91) analoge Analysis führt auf die Konstruktion eines Quadrates über einer Höhe oder einer Seite.

95) In ein Dreieck ein Rechteck einzutragen, dessen Seiten ein gegebenes Verhältnis haben.

96) In ein Dreieck ein Rechteck einzuzeichnen, so daß die eine Diagonale desselben eine gegebene Richtung hat.

97—100) In ein Dreieck eine Raute einzuschreiben,

97) welche mit demselben einen Winkel gemeinschaftlich hat;

98) in welcher ein Winkel gleich α ist;

99) in welcher eine Diagonale einer gegebenen Geraden parallel ist;

100) deren Diagonalen ein gegebenes Verhältnis haben.

101—102) In ein Dreieck ein Parallelogramm einzuschreiben,

101) von welchem ein Winkel und das Verhältnis der Seiten gegeben sind;

102) von welchem ein Winkel und die Richtung einer Diagonale gegeben sind.

---

103) Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche mit zwei gegebenen Geraden gleiche Winkel bildet.

104) Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade so zu legen, daß die auf den Schenkeln eines gegebenen Winkels abgeschnittenen Strecken ein gegebenes Verhältnis haben.

105) In einem Dreieck zur Grundlinie eine Parallele zu ziehen, welche mit dem unteren Abschnitte auf einer der geschnittenen Seiten in einem gegebenen Verhältnisse steht.

106) Im Dreiecke ABC die Seiten AB und AC durch eine Transversale XY so zu schneiden, daß BX = XY = YC wird.
Die Form von BXYC ist bekannt.

107) Im Dreieck ABC zur Seite AC eine Parallele so zu ziehen, daß sie die mittlere geometrische Proportionale zwischen den auf BC gebildeten Abschnitten wird.

---

108) In ein Dreieck ein Rechteck einzuzeichnen, welches einen gegebenen Umfang hat.

Analysis. In das Dreieck ABC sei das Rechteck DEFG so eingeschrieben, daß D auf AB, E auf BC und FG auf AC

liege. Verlängert man DE über D hinaus um die anstoßende Seite DG bis H, so erhält man als Ort für H eine durch A gehende Gerade. Ein zweiter Ort für H ist eine Parallele zu BC [VII. Anh., A. 17]. Mit dem Punkte H ist das Rechteck bestimmt.

109) In ein Dreieck ein Rechteck von gegebener Seitendifferenz einzuschreiben.

110) In ein Dreieck ein Parallelogramm mit einem gegebenen Winkel und gegebenem Umfang einzuschreiben.

111) In ein Dreieck ein Parallelogramm mit einem gegebenen Winkel und gegebener Seitendifferenz einzuzeichnen.

XI. Anhang.

Übungen zu 161—166.

1) Zwei Dreiecke sind gleich, wenn sie in zwei Seiten übereinstimmen und die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel zusammen 2 R betragen.

2) Durch die Diagonalen wird jedes Parallelogramm in vier gleiche Dreiecke zerlegt.

3) Ein Dreieck wird durch eine Mittellinie halbiert.

4) Ein Dreieck wird durch die drei Mittellinien in sechs gleiche Teile zerlegt.

5) Verlängert man jede Seite eines Dreieckes in demselben Sinne um sich selbst, so schließen die Verbindungslinien der konstruierten Punkte ein Dreieck ein, welches 7mal so groß ist als das gegebene.

6) In einem Trapeze bilden die Diagonalen mit den nicht parallelen Seiten zwei gleiche Dreiecke.

7) Wird durch die Ecke eines Trapezes ABCD die Parallele zur Diagonale BD gezogen und AD bis zum Durchschnitte E mit der Parallelen verlängert, so ist $\triangle$ AED = ABCD.

8) Zieht man durch die Mitte einer der nicht parallelen Seiten eines Trapezes irgend eine Gerade bis zu den Durchschnitten mit den parallelen Seiten, so ist das entstandene Trapez (Parallelogramm) dem ursprünglichen gleich.

9) Ein Trapez wird durch die Verbindungslinie der Mitten der parallelen Seiten halbiert.

10) Die Mitte einer der nicht parallelen Seiten eines Trapezes ist mit den Endpunkten der Gegenseite verbunden. Beweise, daß das von den Verbindungsstrecken eingeschlossene Dreieck halb so groß ist als das Trapez.

11) Die Parallelen durch die Ecken eines Viereckes zu den Diagonalen begrenzen ein Parallelogramm, welches doppelt so groß ist als das Viereck.

12) Ein Viereck ist gleich einem Dreieck, in welchem zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel den Viereckssdiagonalen und einem von diesen gebildeten Winkel bezüglich gleich sind. 11.

13) Wird ein Punkt innerhalb eines Parallelogrammes mit den vier Ecken verbunden, so ist die Summe von je zwei Dreiecken, welche über Gegenseiten stehen, halb so groß als das Parallelogramm. — Wie ändert sich der Satz, wenn der Punkt außerhalb des Dreieckes angenommen wird?

14) Werden zwei Gegenecken eines Viereckes mit den Mitten zweier Gegenseiten verbunden, so ist das von diesen Verbindungsstrecken eingeschlossene Viereck der Hälfte des Viereckes gleich.

15) E und F seien die Mitten zweier Gegenseiten AB und CD eines Viereckes. Beweise, daß $\triangle$ ECD + $\triangle$ FAB = ABCD.

16) Die Halbierungspunkte zweier Seiten eines Dreieckes sind mit einander verbunden und durch dieselben unter sich parallele Linien bis zum Durchschnitte mit der dritten Seite gezogen. Beweise, daß das entstandene Parallelogramm halb so groß ist als das Dreieck.

17) Ein Viereck ist doppelt so groß als das Parallelogramm, welches die Verbindungslinien der aufeinander folgenden Seitenmitten einschließen.

18) Vierecke, deren Seiten dieselben Mittelpunkte haben, sind flächengleich. A. 17.

19) Wenn man über den Seiten AB und BC eines Dreieckes ABC nach außen die Parallelogramme ADEB und BFGC konstruiert, DE und FG bis zu ihrem Treffpunkte H verlängert und zu BH die parallelen, von den gegenüberliegenden Seiten der Parallelogramme begrenzten Strecken AI und CK zieht, so entsteht ein drittes Parallelogramm AIKC, welches der Summe der beiden ersteren gleich ist. (Satz des Pappus.)

20) Das Quadrat über der Höhe eines rechtwinkligen Dreieckes ist gleich dem Rechtecke aus den beiden Hypotenusenabschnitten. **166.**

XII. Anhang.

Übungen zu 167—175.

1) Die Seiten a, b, c eines Dreieckes werden in demselben Sinne bezw. um b, c, a verlängert und die erhaltenen Punkte verbunden. Bestimme das Verhältnis des konstruierten Dreieckes zu dem ursprünglichen. $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$.

2) Ebenso, wenn a, b, c bezw. um c, a, b verlängert werden.

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1\right) : 1.$$

3) In gleichen Dreiecken (Parallelogrammen) verhalten sich die Grundlinien umgekehrt wie die Höhen.

4) Zwei Dreiecke (Parallelogramme), welche in einem Winkel übereinstimmen, verhalten sich wie die Produkte der diesen Winkel einschließenden Seiten.

5) Wenn ein Winkel eines Dreieckes einen Winkel eines zweiten Dreieckes zu π ergänzt, so verhalten sich die Dreiecke wie die Produkte der diese Winkel einschließenden Seiten.

6) Stimmen zwei gleiche Dreiecke in dem Produkte zweier Seiten überein, so sind die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel gleich oder supplementär.

7) Zwei Dreiecke mit einem gemeinsamen Winkel sind flächengleich, wenn die zwei Geraden, welche je eine Ecke des einen Dreieckes mit einer Ecke des andern verbinden, parallel sind. 164 oder A. 4.

8) Haben zwei gleiche Dreiecke einen Winkel gemeinsam, so sind diejenigen Verbindungslinien je zweier Ecken der Dreiecke, welche nicht Seiten sind, parallel. A. 4.

9) Auf den Seiten AB, BC, AC eines Dreieckes ABC sind drei Punkte C', A', B' so gelegen, daß $AC' : C'B = 1 : 1$, $BA' : A'C = 1 : 3$ und $AB' : B'C = 2 : 3$. Bestimme das Verhältnis der Dreiecke AB'C', BC'A', CA'B', A'B'C' zu dem Dreiecke ABC. A. 4.

10) In einem durch seine Seiten a, b, c gegebenen Dreiecke ABC schneiden die Winkelhalbierenden AD, BE, CF die Seiten in D, E, F. Das Verhältnis der Dreiecke DEF und ABC zu bestimmen. A. 4; VIII. Anh., A. 17.

11) Durch einen Punkt P innerhalb eines Dreieckes ABC sind die Transversalen AA′, BB′, CC′ gezogen. Beweise die Gleichung

$$\frac{PA'}{AA'} + \frac{PB'}{BB'} + \frac{PC'}{CC'} = 1.$$

---

12) Eine Dreiecksseite ist im Verhältnisse m : n geteilt und durch den Teilpunkt die Parallele zu einer zweiten Seite gezogen. Wie groß sind die einzelnen Teile des Dreieckes im Vergleiche mit dem ganzen Dreiecke?

m : n = 1 : 1; m : n = 1 : 2; m : n = 2 : 3.

13) Die Fläche eines Dreieckes, dessen Seiten 13, 14, 15 cm messen, beträgt 84 qcm. Wie groß ist die Fläche eines ähnlichen Dreieckes, in welchem die größte Seite 75 cm [1,89 m] lang ist?

Wie groß sind die Seiten eines Dreieckes von gleicher Gestalt, dessen Fläche 21 qcm [84 qm; 189 qcm; 120,96 qm; 233⅓ qcm] mißt?

14) Zieht man in einem Trapeze die Diagonalen, so entstehen 8 Dreiecke; wie verhält sich die Fläche eines Dreieckes zu den Flächen aller übrigen, wenn sich die parallelen Seiten wie 2 : 3 verhalten?

15) Durch den Schwerpunkt eines Dreieckes ist die Parallele zu einer Seite gezogen. Wie verhalten sich die einzelnen Teile des Dreieckes zu einander und zum ganzen Dreiecke?

16) Ähnliche Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate homologer Mittellinien (oder Winkelhalbierenden).

17) Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes wird durch die Höhe in zwei Abschnitte geteilt, welche sich wie die Quadrate der anliegenden Katheten verhalten. **168. 173.** Vergl. Seite 35, A. 29, β.

18) Ein Dreieck verhält sich zu dem aus seinen drei Mittellinien konstruierten Dreiecke wie 4 : 3.

Ist S der Schwerpunkt und schneidet BS die Seite AC in D, so verlängere SD um sich selbst bis E und bestimme das Verhältnis von △ ASE zu △ ABC und zu dem aus den Mittellinien konstruierten Dreiecke. Anh. XI, A. 4. **173.**

XIII. Anhang.

Übungen zu 176—179.

1) Die Grundlinie eines Parallelogrammes ist gleich 3,625 m, die Höhe = 96 cm. Wie groß ist die Fläche?

2) Die Fläche eines Parallelogrammes ist = 1 a, die Grundlinie = 25,6 m. Wie groß ist die zu dieser Grundlinie gehörige Höhe?

Wie groß ist der Umfang des Parallelogrammes, wenn die zweite Höhe 31,25 m mißt?

3) Der Umfang eines Rechteckes ist = 72,4 m, die Differenz zweier anliegender Seiten = 13,8 m. Wie groß ist die Fläche?

4) Wie groß ist die Fläche eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten 13,5 m [2,34 m] und 9,8 m [1,85 m] messen?

5) Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes wird durch die Höhe in die Abschnitte p und q geteilt. Wie groß ist die Fläche des Dreieckes? p = 20 [18; 12,8]; q = 5 [8; 12,5].

6) Die Grundlinie eines Dreieckes ist = 7,25 m und die Höhe = 4,8 m; die Seite eines gleich großen Quadrates zu berechnen.

7) Wie groß ist die Grundlinie eines Dreieckes von 12,8 m Höhe, wenn dasselbe einem Quadrate von 96 m Umfang gleich ist?

8) In einem Dreiecke verhalten sich Grundlinie und Höhe wie 5 : 4; dieselben zu berechnen, wenn die Fläche des Dreieckes = 8450 qm ist.

9) Die Fläche eines Dreieckes zu berechnen aus a = 36 cm, b = 25 cm und $\gamma = 30^0$. IV. Anh., A. 15.

10) Die Fläche eines Trapezes aus den parallelen Seiten p = 9,35 m, p′ = 8,25 m und der Höhe h = 3,15 m zu berechnen.

11) In einem Trapeze mißt eine der nicht parallelen Seiten 6,5 m, die Senkrechte auf dieselbe aus der Mitte der Gegenseite 2,4 m. Wie groß ist die Fläche?

12) Die Fläche einer Raute aus den Diagonalen e und f zu bestimmen. e = 2,04 m; f = 5,25 m.

13) Einem Quadrat ist ein anderes umgeschrieben. Der Unterschied ihrer Flächen beträgt 16,65 qm, der ihrer Umfänge 7,4 m. Wie groß ist jedes Quadrat?

14) Die Fläche eines Viereckes ABCD zu berechnen, in welchem die Diagonale AC = 46,5 m ist und die Abstände der Gegenecken B und D von AC 12,4 m und 23,6 m betragen.

15) In einem Vierecke messen die zu einander senkrechten Diagonalen 44 cm und 25 cm. Wie groß ist die Fläche?

16) In einem Vierecke schneiden sich die Diagonalen e und f unter einem Winkel von 30°. Wie groß ist die Fläche?

$e = 40{,}6; \quad f = 30{,}5.$

17) Um die Fläche eines Sechseckes ABCDEF zu bestimmen, wurden auf die Diagonale AD die Senkrechten BB', CC', EE', FF' gefällt und diese, sowie die Abschnitte auf den Diagonalen gemessen. Wie groß ist die Fläche, wenn BB' = 15, CC' = 30, EE' = 40, FF' = 22, AB' = 10, AF' = 20, AC' = 50' AE' = 60, AD = 90?

18) Ein Vieleck hat die Eigenschaft, daß alle Seiten von einem Punkte den gleichen Abstand a haben; die Fläche zu bestimmen, wenn noch der Umfang u gegeben ist.

$a = 0{,}84; \quad u = 42{,}5.$

---

19) Welche Sätze über Flächengleichheit ergeben sich aus den in 158 aufgestellten Proportionen?

20) Welche Rechtecksgleichung besteht zwischen den Abschnitten zweier Höhen eines Dreieckes?

21—23) In einem Dreiecke ABC sind die Höhen AD und BE gezogen, welche sich in H schneiden. Beweise, daß

21) $BC \cdot CD = AC \cdot CE$ (146);

22) $AD \cdot DH = BD \cdot DC$;

23) $AB^2 = AC \cdot AE + BC \cdot BD$ (A. 21);

24) Einem rechtwinkligen Dreieck ist ein Quadrat so eingeschrieben, daß eine Ecke des Quadrates in den Scheitel des rech-

ten Winkels fällt. Die drei anderen Ecken teilen die Dreiecksseiten so, daß das Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten der Summe der Rechtecke aus den Kathetenabschnitten gleich ist.

Zum Beweise ziehe in dem Dreiecke über dem größeren Hypotenusenabschnitte die Höhe.

25) Ist einem rechtwinkligen Dreieck ein Quadrat so eingeschrieben, daß zwei Ecken auf der Hypotenuse liegen, so ist das Quadrat gleich dem Rechteck aus den beiden äußeren Hypotenusenabschnitten.

XIV. Anhang.

Übungen zu 180—185.

1) Aus den nachfolgenden Bestimmungsstücken eines rechtwinkligen Dreieckes die übrigen Seiten und die Fläche zu berechnen.

α)*) $b = 17{,}5$; $c = 28{,}8$. β) $a = 80{,}8$; $b = 16$.
γ) $b = 13{,}6$; $h = 6{,}4$. δ) $a = 40$; $q = 25{,}6$.
ε) $p = 7{,}5$; $q = 4{,}8$. η) $b = 16{,}4$; $p = 3{,}6$.
ζ) $h = 2\frac{1}{2}$; $q = 1\frac{1}{3}$.
ϑ) $a = 105$; $b : c = 4 : 3$. ι) $a + c = s = 49$; $b = 35$.
$\varkappa$) $b = 84$; $a - c = d = 72$.
λ) $b = c$; $a + b + c = s = 20$.
μ) $c = 7$; $\gamma = 30^0$. ν) $a = 50$; $\gamma = 30^0$.

2) Aus der Fläche f und der Kathete a eines rechtwinkligen Dreieckes die beiden anderen Seiten zu berechnen.

$$f = 210\text{m};\quad a = 20\text{m}.$$

3) Aus der Seite a eines gleichseitigen Dreieckes die Höhe und die Fläche zu berechnen.

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3};\quad \triangle = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}. \quad — \quad a = 1;\ 3{,}6.$$

4) Die Fläche eines gleichseitigen Dreieckes aus der Höhe h zu bestimmen. $a = \frac{2}{3}h\sqrt{3}$; $\triangle = \frac{h^2}{3}\sqrt{3}$.

*) a Hypotenuse, b und c Katheten. Vergl. Seite 35, A. 27.

5) Die Summe s aus der Seite und Höhe eines gleichseitigen Dreieckes ist gegeben; die Fläche zu berechnen.

6) Wie groß ist die Seite eines gleichseitigen Dreieckes, dessen Inhalt gleich 1 qm ist?

7) Aus der Seite a eines gleichseitigen Dreieckes die Fläche des eingeschriebenen Quadrates zu berechnen.

8—9) Die Fläche eines gleichschenkligen Dreieckes zu berechnen:

8) aus dem Schenkel a und der Grundlinie b;
$a = 14,5$ [20,5]; $b = 4,8$ [16,8];

9) aus dem Schenkel a und der Höhe h auf die Grundlinie; $a = 29$ [24,1]; $h = 20$ [20,9];

10) In einem gleichschenkligen Dreiecke mißt die Grundlinie 56 cm, der Schenkel 53 cm. Wie weit ist der Schwerpunkt von den Seiten und Ecken entfernt?

11) Die Fläche eines gleichschenkligen Dreieckes ist $= 86,4$ qm. die Grundlinie $= 22,5$ m; wie groß sind die Schenkel?

12—13) Die Fläche einer Raute zu berechnen:

12) aus der Seite a und einer Diagonale e;
$a = 37$ [30,5]; $e = 24$ [41,4];

13) aus der Seite a und dem Verhältnisse m : n der Diagonalen; $a = 20$; $m : n = 3 : 4$.

15—16) Die Fläche eines Quadrates zu bestimmen:

14) aus der Diagonale d;

15) aus der Summe (Differenz) s der Diagonale und Seite.

16) In dem Trapeze ABCD sind die an der einen parallelen Seite BC liegenden Winkel $B = 90^0$ und $C = 120^0$, ferner $BC = CD = 8$; die Fläche zu bestimmen.

17) Die Diagonalen eines Viereckes bilden einen Winkel von 45^0 (60^0). Die Fläche des Viereckes zu berechnen, wenn die Diagonalen (e, f) gegeben sind.

---

18)*) Die Fläche eines gleichschenkligen Dreieckes zu berechnen aus den beiden Höhen h und h'; $h = 56,5$; $h' = 15$.

*) Die Aufgaben 18—24 führen auf schwierigere, znm teil unrein quadratische, Gleichungen.

19) Von einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse und die zugehörige Höhe gegeben; die anderen Seiten zu berechnen.

20) Die Fläche und die Seiten eines Rechteckes zu berechnen aus der Diagonale d und dem Umfange 2s.

21) Aus dem Umfange s und der Höhe h eines rechtwinkligen Dreieckes die Seiten und die Fläche zu bestimmen.

22) Aus einer Kathete b und dem nicht anliegenden Hypotenusenabschnitte q die Fläche und die übrigen Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes zu berechnen. $b = 19{,}5$; $q = 5{,}6$.

23) Die Fläche eines Rechteckes ist = 7260 qm, die Summen aus dem Umfange und den Diagonalen = 660 m. Wie groß sind die Seiten?

24) Von einem gleichschenkligen Dreiecke, in welchem ein Basiswinkel doppelt so groß ist als der Winkel an der Spitze, ist der Umfang 2 s gegeben; die Fläche zu berechnen. A. 32 auf Seite 8.

---

25) Aus zwei Seiten b und c eines Dreieckes die dritte a zu berechnen, wenn der ihr gegenüberliegende Winkel $\alpha = 60^0$ [120^0; 30^0; 150^0; 45^0; 135^0] ist. — $b = 10$; $c = 8$.

26) Auf zwei Seiten AB und BC eines gleichseitigen Dreieckes sind zwei Punkte D und E so gewählt, daß $BD = \frac{2}{3}\,AB$ und $AE = \frac{4}{5}\,AC$ ist. DE aus der Dreiecksseite $\mathbf{a} = 15$ zu berechnen.

27) Von welcher Art sind die Dreiecke, in welchen

α) $a = 5$; $b = 4$; $c = 3$; β) $a = 12$; $b = 8$; $c = 7$;
γ) $a = 17$; $b = 16$; $c = 10$; δ) $a = 13$; $b = 12$; $c = 5$;
ε) $a = 73$; $b = 55$; $c = 48$; η) $a = 100$; $b = 70$; $c = 60$;
ζ) $a = 80$; $b = 75$; $c = 40$;
ϑ) $a = m^2 + n^2$; $b = m^2 - n^2$; $c = 2\,m\,n$.

28) Sind a, b, c die Seiten und h die Höhe auf die Hypotenuse a eines rechtwinkligen Dreieckes, so ist das aus $b + c$, h und $a + h$ konstruierte Dreieck rechtwinklig.

---

29) Sind in einem Vierecke zwei gegenüberliegende Winkel rechte, so sind die Quadratsummen der diese Winkel einschließenden Seiten gleich.

30) Wenn in einem Vierecke die Diagonalen auf einander senkrecht stehen, so sind die Summen der Quadrate der Gegenseiten gleich.

31) Werden auf die Seiten eines Dreieckes von einem Punkte die Senkrechten gefällt, so ist die Summe der Quadrate dreier Seitenabschnitte, welche keine Ecke gemeinsam haben, gleich der Summe der Quadrate der drei anderen.

32) Verlängert man die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes über jeden ihrer Endpunkte hinaus um sich selbst, und verbindet die erhaltenen Punkte mit der gegenüberliegenden Ecke des Dreieckes, so ist die Summe der Quadrate der Verbindungsstrecken fünfmal so groß als das Quadrat der Hypotenuse.

33) Konstruiert man über den Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes ähnliche Vielecke in der Art, daß die Dreiecksseiten homologe Seiten der Vielecke werden, so ist das Polygon über der Hypotenuse gleich der Summe der Polygone über den Katheten.

---

34) Projiziert man zwei Seiten eines Dreieckes aufeinander, so sind die beiden Rechtecke gleich, welche je eine dieser Seiten und die Projektion der anderen auf sie zu Seiten haben.

Beweis ähnlich 182. Zeige, daß der Satz unabhängig ist von der Art des Winkels, welchen die Seiten einschließen. Vergl. Seite 50 A. 21.

35) Mit 34 die Sätze 184 und 185 zu beweisen.

36) Die Summe der Quadrate über den Diagonalen eines Parallelogrammes ist gleich der Summe der Quadrate über den Seiten.

37) In jedem Trapeze übertrifft die Summe der Quadrate über den Diagonalen die Summe der Quadrate über den nicht parallelen Seiten um das doppelte Rechteck aus den parallelen Seiten.

38) Die Diagonale eines gleichschenkligen Trapezes aus den Seiten zu berechnen.

39) In jedem Vierecke übertrifft die Summe der Quadrate über denjenigen Gegenseiten, welche dem stumpfen Winkel der Diagonalen gegenüberliegen, die Summe der Quadrate über den beiden anderen Gegenseiten um das doppelte Rechteck aus einer Diagonale und der Projektion der anderen auf dieselbe.

40) Verbindet man die Spitze eines gleichschenkligen Dreieckes mit einem Punkte der Grundlinie (oder deren Verlängerung), so ist der Unterschied zwischen dem Quadrate des Schenkels und dem der Verbindungsstrecke gleich dem Rechtecke aus den Abschnitten der Grundlinie.

41) Die Differenz der Quadrate zweier Dreiecksseiten ist gleich dem doppelten Rechteck aus der dritten Seite und der Projektion der zugehörigen Mittellinie auf dieselbe.

42) Die Summe der Quadrate zweier Dreiecksseiten ist gleich dem halben Quadrate der dritten Seite, vermehrt um das doppelte Quadrat der zugehörigen Mittellinie.

43) Die Mittellinie eines Dreieckes aus den Seiten zu berechnen. $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2\,b^2 - c^2}$.

44) Aus den Mittellinien eines Dreieckes die Seiten zu berechnen.

45) Die dreifache Summe aus den Quadraten der Seiten eines Dreieckes ist gleich der vierfachen Summe aus den Quadraten der Mittellinien.

46) Für den Schwerpunkt S eines Dreieckes ABC besteht die Gleichung

$$AS^2 + BS^2 + CS^2 = \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + AC^2).$$

47) Der Schwerpunkt eines Dreieckes ist derjenige Punkt, für welchen die Quadrate der Entfernungen von den drei Ecken die kleinste Summe ergeben. A. 26, Seite 35. **184; 185.**

48) In einem Vierecke ist die Summe der Seitenquadrate gleich der Summe der Diagonalenquadrate, vermehrt um das vierfache Quadrat der Verbindungsstrecke der Diagonalenmitten.

49) Eine durch die Spitze eines Dreieckes gezogene Transversale teilt die Grundlinie im Verhältnisse m : n; die Transversale zu berechnen, wenn die Seiten a, b, c gegeben sind.

50) Die Halbierungslinie eines Dreieckswinkels aus den Seiten zu bestimmen.

$$w_c = \frac{\sqrt{ab}}{a + b}\sqrt{(a + b + c)(a + b - c)}.$$

51) Die Halbierungslinie eines Außenwinkels an einem Dreiecke zu berechnen, wenn die Seiten des Dreieckes gegeben sind.

52) In einem Dreiecke, dessen Seiten a, b, c bezw. gleich 30, 26, 19 sind, wird a in drei gleiche Teile geteilt und jeder Teilpunkt mit der Gegenecke verbunden. Berechne diese Verbindungsstrecken.

---

53) Aus den Seiten a, b, c eines Dreieckes die Abschnitte zu berechnen, in welche jede Seite durch die zugehörige Höhe geteilt wird.

$a = 6;\ b = 5;\ c = 4.$

$a = 10;\ b = 6;\ c = 5.$ (Beachte die negativen Vorzeichen!)

54) Aus den Seiten eines Dreieckes die Höhen zu bestimmen. A. 53.

$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$, wenn $\frac{1}{2} \cdot (a+b+c) = s$ gesetzt wird.

55) Die Fläche eines Dreieckes durch die drei Seiten auszudrücken.

$\triangle = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$. (Heronische Formel.)

$a = 15\ [63;\ 70];\ b = 14\ [51;\ 60];\ c = 13\ [30;\ 50].$

56) Mit Hilfe der Heronischen Formel die Fläche eines rechtwinkligen, gleichschenkligen oder gleichseitigen Dreieckes aus den Seiten zu bestimmen.

57) Die Fläche eines Dreieckes aus den drei Höhen zu berechnen.

Ersetze in der Heronischen Formel a durch $\frac{2\triangle}{h_a}$ u. s. w.

58) Die Seiten eines Dreieckes durch die drei Höhen auszudrücken. A. 57.

59) Ein Dreieck hat die drei Seiten 185, 75 und 220. Wie weit steht der Schwerpunkt von der größten Seite ab?

60–62) Die Fläche eines Dreieckes zu berechnen aus:

60) $a,\ b,\ m_c$. — 37; 13; 20.

61) $b,\ m_a,\ m_c$. — [illegible]0; 39; 42. — 88; 45; 111.

62) $m_a,\ m_b,\ m_c$. — 13; 14; 15. — 42; 34; 20.

63—65) Die Fläche eines Parallelogrammes zu berechnen:

63) aus den Seiten (a, b) und einer Diagonale (d) [$a = 120;\ b = 104;\ d = 112$];

64) aus einer Seite (a) und den beiden Diagonalen (d, e), [a = 12,5; d = 44,5; e = 20,5];

65) aus den beiden Diagonalen (d, e) und einer Höhe (h). d = 13 [30, 6]; e = 20 [19, 4]; h = 6 [7,2].

Wie viele Parallelogramme?

66) Die Fläche eines Viereckes zu berechnen, wenn dessen vier Seiten und eine Diagonale gegeben sind.

AB = 123; BC = 130; CD = 140; AD = 267; BD = 150.

67) Die Fläche eines Trapezes zu berechnen aus den parallelen Seiten (b, d), einer der nicht parallelen Seiten (a) und einer Diagonale (e). A. 55. **168.**

[a = 68; b = 40; d = 80; e = 84.]

68) Ein Trapez zu berechnen aus den parallelen Seiten (b, d) und den Diagonalen (e, f). b = 100; d = 140; e = 224; f = 208.

69) Die Fläche eines Trapezes aus den vier Seiten (a, b, c, d) zu berechnen.

Zerlege das Trapez in ein Parallelogramm und ein Dreieck und bestimme zunächst nach 54 die Höhe dieses Dreieckes.

$$F = \frac{d+b}{4(d-b)} \sqrt{(a-b+c+d)(a+b+c-d)(a-b-c+d)(-a-b+c+d)}.$$

a = 40; b = 57; c = 37; d = 70.

Wie vereinfacht sich diese Formel für das gleichschenklige Trapez (a = c)?

70) Die Fläche eines Trapezes zu berechnen aus einer der parallelen Seiten (b), den beiden nicht parallelen Seiten (a, c) und der Höhe (h). — Wie viele Trapeze?

a = 51; b = 50; c = 30; h = 24.

XV. Anhang.

Konstruktionsaufgaben.

Eine Figur in eine andere verwandeln heißt, eine der gegebenen flächengleiche Figur konstruieren.

1) Ein gegebenes Parallelogramm in ein anderes mit gegebenem Winkel α [60°; 90°] zu verwandeln. **162.**

2) Ein Parallelogramm in anderes zu verwandeln, welches eine gegebene Strecke als Seite enthält. 162.

3) Ein Parallelogramm unter Beibehaltung der Winkel in ein anderes zu verwandeln, welches eine gegebene Strecke als Seite enthält. 166.

4) Ein Parallelogramm in anderes zu verwandeln, welches einen gegebenen Winkel und eine gegebene Seite hat. A. 1; 3.

5—6) Ein Parallelogramm in ein Dreieck zu verwandeln

5) mit derselben Grundlinie;

6) mit gleicher Höhe. 164.

7—8) Ein Dreieck in ein Parallelogramm zu verwandeln

7) mit derselben Grundlinie;

8) mit gleicher Höhe. 164.

---

9) Der geometrische Ort für die Spitzen flächengleicher Dreiecke über derselben Grundlinie ist eine Parallele zur Grundlinie.

10—13) Ein Dreieck in ein anderes über derselben Grundlinie zu verwandeln,

10) welches einen gegebenen Winkel an der Grundlinie hat;

11) in welchem eine Seite durch einen gegebenen Punkt geht;

12) in welchem die Spitze auf einer gegebenen Geraden liegt (Determination!);

13) welches eine gegebene Strecke als Seite enthält. A. 9.

14) Ein Dreieck in ein gleichschenkliges über derselben Grundlinie zu verwandeln.

15) Ein Dreieck in ein gleichschenkliges zu verwandeln, so daß eine Seite des gegebenen Dreieckes Schenkel wird.

16) Ein n Eck in ein (n—1) Eck zu verwandeln.

Schneide durch eine Diagonale ein Dreieck ab und verwandle dieses in ein anderes über der Diagonale als Grundlinie, so daß eine Seite in die Verlängerung einer anstoßenden Vieleckseite fällt. A. 9.

17) Ein Polygon in ein Dreieck zu verwandeln.

Durch wiederholte Anwendung von 16.

18) Ein Dreieck unter Beibehaltung eines Basiswinkels in ein anderes zu verwandeln, welches eine gegebene Strecke zur Grundlinie hat.

Auflösung. Soll in dem Dreiecke ABC $\wedge$ A beibehalten werden, so schneidet man auf der Grundlinie von A aus AD gleich der gegebenen Strecke ab. Die Gerade AB und die Parallele durch C zu BD sind zwei Ortslinien für die dritte Ecke E des gesuchten Dreieckes ADE.

19) Ein Dreieck unter Beibehaltung eines Basiswinkels in ein anderes mit gegebener Höhe zu verwandeln. 18; 9.

20) Ein Dreieck in ein anderes von gegebener Grundlinie und gegebenem Winkel an derselben zu verwandeln. 18; 10.

Aufgabe 4 in derselben Weise zu lösen.

21) Ein Dreieck in ein anderes von gegebenem Basiswinkel und gegebener Höhe zu verwandeln. 18; 10.

22) Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, so daß die Spitze in einen über der Grundlinie gegebenen Punkt fällt.

23—25) Ein Dreieck in ein gleichschenkliges zu verwandeln

23) mit gegebener Basis;

24) mit gegebenem Schenkel;

25) mit gegebener Höhe auf die Basis.

26—35) Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, von welchem gegeben sind:

26) b, c.

27) p, q.

28) b, h_a.

29) h_a, h_b.

30) a, $\alpha = R$.

31) h_b, a $\pm$ b. (Durch die Fläche und h_b ist b bestimmt.)

32) b, m_a (Seite 45, A. 3).

33) m_b, $\wedge$ (b m_b).

34) m_a, m_b.

35) m_a, h_b.

36) b, a : c (VIII Anh., A. 26).

---

37) Ein Dreieck unter Beibehaltung eines Winkels in ein anderes zu verwandeln, in welchem die Gegenseite des Winkels eine gegebene Richtung hat.

Analysis: In dem gegebenen Dreiecke ABC soll $\wedge$ A ungeändert bleiben und die Gegenseite dieses Winkels die Richtung CD erhalten. Es sei $\triangle$ AEF das verlangte Dreieck, also

EF || DC, und zwar liege E auf der Geraden AB und F auf AC. Dann folgt aus der angenommenen Gleichheit der Dreiecke AEF und ABC (Seite 47, A. 4)

AE : AB = AC : AF und, weil EF || DC, nach **137**
AD : AE = AC : AF;

AD : AE = AE : AB.

AE ist somit die mittlere Proportionale zwischen AD und AB. — Seite 39, A. 9.

38—41) Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, von welchem gegeben sind:

38) α, β. (A. 10; 37.)

39) α, b : c.

40) a : b : c.

41) α, b = h_b.

42) Ein Dreieck in ein gleichseitiges zu verwandeln.

43) Ein Parallelogramm in eine Raute mit einem gegebenen Winkel zu verwandeln.

44) Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

Verwandle die Hälfte des Rechteckes nach A. 36 in ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck, oder benütze **182**, Zusatz 2 oder A. 20 auf Seite 46.

45) Ein Dreieck [n Eck] in ein Quadrat zu verwandeln.

46) Ein Polygon P in ein anderes zu verwandeln, welches einem zweiten gegebenen Polygon Q ähnlich ist.

Die Analysis mit **175** zeigt, daß Q nach dem Verhältnisse der Seiten der Quadrate, in welche P und Q verwandelt werden können, abzubilden ist.

---

47) Ein Dreieck [Parallelogramm] zu konstruieren, welches 2, 3, 4, . . n mal so groß ist als ein gegebenes.

48) Ein Dreieck zu konstruieren, welches so groß ist als zwei oder mehrere Dreiecke zusammen.

49) Die Summe oder Differenz zweier Quadrate zu zeichnen.

50) Ein Quadrat zu konstruieren, welches 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 24 mal so groß ist als ein gegebenes.

51) Ein Quadrat zu konstruieren, welches $\frac{4}{9}$ [$\frac{16}{25}$; $\frac{9}{16}$; $1\frac{7}{9}$] mal so groß ist als ein gegebenes.

52) Ein Quadrat (gleichseitiges Dreieck) zu konstruieren, welches sich zu einem gegebenen verhält wie 13 : 16 ($\frac{13}{16} = \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$); [5 : 36; 7 : 36; 10 : 9; 29 : 100; 21 : 100; 5 : 16; 3 : 16; 17 : 25; 3 : 5; 5 : 8; 3 : 2; 9 : 5].

53) Ein Quadrat zu konstruieren, welches so groß ist als zwei gegebene Parallelogramme zusammen.

54) Zwei gegebene ähnliche Polygone zu addieren oder zu subtrahieren.

55) Ein Polygon zu konstruieren, welches einem gegebenen ähnlich ist und sich zu demselben verhält wie 4 : 9; [16 : 25; 13 : 16].

---

56) Ein Parallelogramm durch Parallele zu einer Seite in n gleiche Teile zu teilen.

57) Ein Dreieck durch Gerade, welche von einer Ecke ausgehen, in n gleiche Teile zu teilen.

58) Ein Dreieck von einer Ecke aus im Verhältnisse m : n (2 : 3; 4 : 5; 3 : 7) zu teilen.

59) Ein Trapez durch Gerade, welche durch den Treffpunkt der nicht parallelen Seiten gehen, in n gleiche Teile zu teilen.

60) Innerhalb eines Dreieckes einen Punkt zu bestimmen, so daß die Verbindungslinien desselben mit den Ecken das Dreieck in drei gleiche Teile zerlegt. A. 57; 9.

Welcher merkwürdige Punkt des Dreieckes ist der gesuchte Punkt?

61) Ein gleichseitiges Dreieck in 5 gleiche Teile zu teilen, so daß die Teilungslinien vom Schwerpunkte auslaufen und eine derselben durch eine Ecke geht.

62) Ein Dreieck durch Gerade, welche von einem auf einer Dreiecksseite gegebenen Punkte P ausgehen, nach dem Verhältnisse 1 : 2 : 3 zu teilen.

Es liege P auf der Seite AB des gegebenen Dreieckes ABC. Verwandle das Dreieck unter Beibehaltung des $\wedge$ A in ein anderes, dessen Spitze in P liegt, und teile dieses Dreieck von P aus nach dem gegebenen Verhältnisse. Fällt eine Teilungs-

linie PX zum teil über das gegebene Dreieck ABC hinaus, so verwandle △ PCX in ein Dreieck, welches ganz innerhalb des △ ABC liegt (A. 12).

AB = 60; BC = 40; AC = 50; AP : PB = 2 : 1 (2 : 5).

63) Ein Dreieck durch Gerade, welche von einem innerhalb desselben gegebenen Punkte auslaufen und von denen eine durch eine Ecke geht, in n (3; 5) gleiche Teile zu teilen.

64) Ein Viereck durch eine Gerade von einer Ecke aus zu halbieren.

65) Ein Dreieck durch Parallele zu einer Seite in n (2; 3) gleiche Teile zu teilen. A. 57; 37.

66) Ein Dreieck durch eine Parallele zu einer Seite nach dem Verhältnisse 4 : 5 [16 : 9; 9 : 7] zu teilen. **173.** A. 58; 37.

67) Ein Dreieck durch eine Gerade, welche zu einer gegebenen Geraden parallel läuft, nach dem Verhältnisse m : n (1 : 1; 2 : 3) zu teilen. A. 58; 37.

68) Ein Dreieck durch Senkrechte zur Grundlinie nach dem Verhältnisse 1 : 2 : 4 zu teilen.

69) Ein Punkt P innerhalb eines Dreieckes ABC ist mit der Ecke B verbunden; durch P eine Gerade PX so zu ziehen, daß die gebrochene Linie BPX das Dreieck halbiert.

70) Die Ecke B eines Dreieckes ABC mit einem gegebenen Punkte D auf AC durch eine unter einem rechten Winkel gebrochene Linie so zu verbinden, daß das Dreieck halbiert wird.

AB = 70; BC = 49; AC = 80; AD : DC = 3 : 2.

71) Die Ecke B eines Dreieckes ABC mit einem gegebenen Punkte D auf AC durch eine gebrochene Linie BXD so zu verbinden, daß das Dreieck halbiert wird und BX : XD = m : n. A. 9; VIII. Anh., A. 26.

XVI. Anhang.

Übungen zu 186—218.

1) Von allen Strecken, welche einen festen Punkt innerhalb oder außerhalb eines Kreises mit den Punkten des Umfanges verbinden, ist diejenige die größte, welche durch den Mittelpunkt geht,

und diejenige die kleinste, deren Verlängerung durch den Mittelpunkt geht.

2) Von den Endpunkten eines Bogens hat jeder Punkt des Durchmessers, welcher durch die Mitte des Bogens geht, gleichen Abstand. Umkehrung.

3) Wird ein Kreisbogen AB in drei gleiche Teile geteilt, so zerlegen die nach den Teilpunkten gezogenen Halbmesser die Sehne AB in drei Abschnitte, von welchen die beiden äußeren einander gleich und jeder größer ist, als der mittlere.

4) Wird eine Sehne AB in drei gleiche Abschnitte geteilt, so zerlegen die Halbmesser durch die Teilpunkte den Bogen AB in drei Teile, von denen die beiden äußeren einander gleich und jeder kleiner ist als der mittlere.

Verlängere den Abstand eines Teilpunktes vom Mittelpunkt um sich selbst und verbinde den Endpunkt der Verlängerung mit dem näheren Endpunkt der Sehne.

5) In einen Kreis ist eine Sehne, gleich dem Halbmesser, eingetragen; in welche Bogen teilen ihre Endpunkte den Kreisumfang?

6) Wird durch den Endpunkt eines Halbmessers eine Gerade unter einem schiefen Winkel gegen den Halbmesser gezogen, so schneidet sie den Kreis noch in einem zweiten Punkte.

7) Die Tangenten an den Endpunkten eines Durchmessers sind parallel.

8) Die Berührungspunkte von zwei parallelen Tangenten liegen mit dem Mittelpunkte auf einer Geraden.

9) Zwei Sehnen eines Kreises können einander nicht halbieren. **200,3; 31.**

10) Eine Tangente ist zu einer Sehne, welche durch den Durchmesser nach dem Berührungspunkte halbiert wird, parallel.

11) Der geometrische Ort für die Mitten paralleler Sehnen eines Kreises ist der zu ihrer Richtung senkrechte Durchmesser.

12) Zwischen Parallelen liegen gleiche Bogen eines Kreises.

Fälle vom Mittelpunkte die Senkrechte auf die Sehnen.

Der Satz gilt auch dann, wenn die eine Parallele den Kreis berührt, oder wenn beide Tangenten sind (vergl. A. 8).

13) Die Endpunkte von zwei parallelen Sehnen eines Kreises sind die Ecken eines gleichschenkligen Trapezes.

14) Fällt man von den Endpunkten eines Durchmessers auf eine beliebige Sehne die Senkrechten, so sind die zwei Strecken gleich, welche von den Fußpunkten und den Endpunkten der Sehne begrenzt sind.

15) In einem Kreissegmente liegende Senkrechte zur Sehne sind gleich, wenn ihre Fußpunkte von der Mitte der Sehne gleichweit abstehen.

---

16) Wie groß sind die Umfangswinkel, welche über Bogen von 30°, 60°, 90°, 112° 45′ 24″, 240° stehen?

17) Ein Mittelpunktswinkel übertrifft einen über demselben Bogen stehenden Umfangswinkel um 30°; wie groß sind beide?

18) Ein Umfangswinkel und sein Mittelpunktswinkel betragen zusammen 150° [360°]; wie groß ist jeder?

19) Eine Kreislinie wird durch vier Punkte nach dem Verhältnisse 1 : 2 : 4 : 5 geteilt. Wie groß sind die Winkel des Viereckes, welches die Verbindungsstrecken von je zwei aufeinander folgenden Punkten zu Seiten hat? Welche Winkel bilden die Diagonalen mit den Seiten?

20) Sind A, B, C, D vier auf einander folgende Punkte eines Kreises und ist die Sehne AB gleich der Sehne CD, so ist ABCD ein gleichschenkliges Trapez. **196; 199,1.**

21) Leite die Eigenschaften desselben Viereckes aus der Voraussetzung AC = BD ab.

22) Zwei gleiche sich schneidende Sehnen werden durch ihren Schnittpunkt in bezüglich gleiche Abschnitte zerlegt.

23) Die Endpunkte von zwei parallelen und gleichen Sehnen sind die Ecken eines Rechteckes. Die Diagonalen sind Durchmesser.

24) Schneiden sich zwei Sehnen eines Kreises unter einem rechten Winkel, so beträgt die Summe von je zwei gegenüberliegenden Bogen 180°.

25) Stehen zwei Sehnen aufeinander senkrecht, so ist die Quadratsumme der Sehnenabschnitte gleich dem Quadrate des Durchmessers. A. 24.

26) Zwei Sehnen schneiden sich unter einem Winkel von 30°; wie zerlegen deren Endpunkte den Kreisumfang, wenn je zwei gegenüberliegende Bogen sich wie 1 : 2 verhalten?

27) Zwei gleiche Sehnen schneiden sich unter einem Winkel von 40°; in welche Bogen wird der Umfang zerlegt, wenn zwei aufeinander folgende Bogen sich wie 2 : 5 verhalten?

28) Es seien A, B, C drei beliebige Punkte auf einem Kreise, D die Mitte des Bogens AB, E die Mitte des Bogens AC, DE schneide die Sehnen AB und AC in F und G; zu beweisen, daß AF = AG ist.

29) Ein Sekantenwinkel von 40° steht über einem Bogen von 90°; wie groß ist der zweite von den Schenkeln eingeschlossene Bogen? (Zwei Fälle.)

30) Durch einen Punkt außerhalb eines Kreises ist die durch den Mittelpunkt gehende Sekante und eine zweite so gezogen, daß der äußere Abschnitt der letzteren dem Halbmesser gleich ist; das Verhältnis der von den Sekanten eingeschlossenen Bogen zu bestimmen.

31) An einem Kreis sind von einem Punkte, dessen Abstand vom Mittelpunkt dem Durchmesser gleich ist, die Tangenten gezogen. Wie viel Grad haben die Bogen zwischen den Berührungspunkten?

32) Der über einer Dreiecksseite als Durchmesser beschriebene Kreis geht durch die Fußpunkte der Höhen, welche auf die beiden anderen Seiten gefällt sind.

33) Wenn in zwei rechtwinkligen Dreiecken mit derselben Hypotenuse ein Winkel des einen Dreieckes größer ist als ein Winkel des anderen, so liegt dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber.

34) Satz 28 im V. Anhang mit **199**,1 und 2 zu begründen.

Zum Beweise ziehe zwei Höhen AA′ und BB′, verbinde ihren Schnittpunkt H mit C und konstruiere über AB und CH als Durchmesser zwei Kreise; CH schneidet AB unter einem rechten Winkel. **70**, 3.

35) Beweise Satz 17 im IX. Anhang (S. 34) mit **199**,1 und 2.

36) Den geometrischen Ort für die Mitten der Sehnen, welche durch einen gegebenen Punkt (innerhalb oder außerhalb des Kreises) gehen, zu bestimmen.

37) Die Halbierungslinien der Winkel an den Spitzen der Dreiecke, welche über derselben Grundlinie stehen und in dem dieser gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, gehen durch einen Punkt.

38) Wird der eine Schenkel eines beliebigen Umfangswinkels in einem Segment über AB um den andern verlängert, so liegt der konstruierte Punkt auf einem Kreisbogen über derselben Sehne AB.

Wo liegt der Mittelpunkt dieses Bogens?

39) Welches ist der geometrische Ort für die Höhenschnittpunkte der Dreiecke, welche dieselbe Grundlinie haben und in dem dieser gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen?

40) Welches ist der geometrische Ort für die Schwerpunkte der Dreiecke, welche über derselben Grundlinie stehen und in dem Winkel an der Spitze übereinstimmen?

Ziehe durch den Schwerpunkt zu zwei Seiten die Parallelen.

---

41) Die Sätze 201—204 mit 182 zu beweisen.

42) Von den Halbierungslinien der Winkel, welche zwei gleiche Sehnen bilden, geht die eine durch den Mittelpunkt.

43) Halbiert die Gerade, welche den Schnittpunkt zweier Sehnen mit dem Mittelpunkt verbindet, einen Winkel der Sehnen, so sind diese gleich.

44) Von allen Sehnen durch einen Punkt innerhalb eines Kreises ist diejenige die kleinste, welche auf dem durch den Punkt gezogenen Durchmesser senkrecht steht.

45) Welches ist der geometrische Ort der Mitten aller gleichen Sehnen eines Kreises?

46) Fällt man von einem Punkt des Umfanges eines Kreises auf einen Durchmesser die Senkrechte, so ist diese das geometrische Mittel zwischen den Abschnitten des Durchmessers.

47) Ein Punkt hat vom Mittelpunkt eines Kreises mit dem Halbmesser r einen Abstand a; wie groß ist die kleinste Sehne durch den Punkt? $r = 30$; $a = 18$.

48) Eine Sehne von der Länge a wird von einer zweiten

Sehne im Verhältnisse m : n geteilt; wie groß ist letztere, wenn ihre Abschnitte sich wie p : q verhalten?

$a = 42;\ m : n = 3 : 4.\quad p : q = 1 : 3.$

49)*) Eine Sehne von der Länge a wird von einer zweiten halbiert; wie groß ist letztere, wenn die Differenz ihrer Abschnitte = d ist? — $a = 8;\ d = 6.$

50) Durch einen Punkt, dessen Abstand vom Mittelpunkte eines Kreises dem Durchmesser gleich ist, ist eine Sekante so gezogen, daß die von dem Kreise abgeschnittene Sehne dem halben Radius gleich ist. Wie groß ist die Sekante? Wie lang ist die Tangente von dem Punkte an den Kreis?

51) An dem einen Endpunkt A des Durchmessers d eines Kreises ist die Tangente konstruiert und durch den andern eine Sekante so gezogen, daß der zwischen dem Kreise und der Tangente liegende Abschnitt eine gegebene Länge a hat; die Sekante und den Abschnitt auf der Tangente zu berechnen. $a = 10;\ d = 12.$

52) Den goldenen Abschnitt einer Strecke a zu berechnen.
$a = 10;$ [3,25].

53) Wie groß ist die Strecke, deren goldener Abschnitt = a ist? $a = 50.$

54) Der Durchmesser d eines Kreises wird stetig geteilt und durch den Teilpunkt die kleinste Sehne gezogen; diese zu berechnen.

55) Die Umkehrungen von **209** und **212** zu begründen.
Beweis indirekt.

56) Auf dem einen Schenkel eines Winkels A sind zwei Punkte B und C und auf dem andern ein Punkt D so gelegen, daß $AB \cdot AC = AD^2$; zu beweisen, daß der durch B, C, D gelegte Kreis AD in D berührt. (Umkehrung von **214**.)

57) Die Halbierungslinie des Winkels zweier Tangenten geht durch den Mittelpunkt. Umkehrung.

58) Die Berührungssehne zweier Tangenten wird von der

---

*) Die Aufgaben 49—54 führen auf vollständige quadratische Gleichungen.

Geraden, welche deren Schnittpunkt mit dem Mittelpunkt verbindet, senkrecht halbiert.

59) Zwei parallele Tangenten eines Kreises mit den Berührungspunkten A und B werden von einer dritten in C und D geschnitten; zu beweisen,

a) daß CD = AC + BD;

b) daß CD von dem Mittelpunkte M aus unter einem rechten Winkel erscheint;

c) daß das Rechteck aus den Abschnitten AC und BD dem Quadrate über dem Halbmesser gleich ist.

60) Sind zwei Punkte A und B vom Mittelpunkte eines Kreises gleichweit entfernt, so sind die von ihnen an den Kreis gezogenen Tangenten (AC, BD) gleich lang.

61) Welches ist der geometrische Ort für die Punkte von der Eigenschaft, daß die von ihnen an einen gegebenen Kreis gezogenen Tangenten einen gegebenen Winkel einschließen?

---

62) Die kürzeste Strecke, welche zwei Punkte auf zwei konzentrischen Kreislinien verbindet, geht verlängert durch den Mittelpunkt.

63) Zwei Kreislinien können sich nicht halbieren.

64) Die Gerade, welche im Berührungspunkt zweier Kreise den einen berührt, ist auch Tangente des anderen.

65) Wenn zwei ungleiche Kreise sich schneiden, so stehen über der gemeinschaftlichen Sehne ungleiche Mittelpunktswinkel und zwar in dem kleineren Kreise der größere.

66) Um den Punkt A auf dem Umfang eines Kreises ist ein zweiter Kreis beschrieben, welcher den ersteren in B und C schneidet. Beweise, daß von den Bogen der beiden Kreise, über welchen $\wedge$ BAC steht, der eine doppelt so groß ist als der andere.

67) Zwei (oder mehrere) Kreise schneiden sich in zwei Punkten; zu beweisen, daß die Tangenten, welche von einem beliebigen Punkte auf der Verlängerung der gemeinschaftlichen Sehne an die Kreise gezogen werden, gleich lang sind.

68) Zwei Kreise M und M' werden von einer gemeinschaftlichen äußeren Tangente in **A** und **B** und von einer gemein-

schaftlichen inneren Tangente in C und D berührt. AB und CD zu berechnen, wenn die Zentrale MM' = c und die Halbmesser R und r gegeben sind.

69) Von dem einen Schnittpunkt A zweier Kreise sind die Durchmesser AB und AC gezogen. Beweise, daß die Punkte B und C mit dem zweiten Schnittpunkte D der Kreise in einer Geraden liegen und daß BC doppelt so groß ist als die Zentrale. $\wedge$ BDC = 2 R. **140.**

70) Jede durch den einen Schnittpunkt von zwei gleichen Kreisen gezogene Gerade schneidet die Kreise in zwei Punkten, welche von dem andern Schnittpunkte der Kreise gleichweit abstehen. Die Mitte der von den Kreisen begrenzten Strecke liegt auf dem Kreise, welcher die gemeinschaftliche Sehne zum Durchmesser hat.

71) Durch den einen Schnittpunkt zweier Kreise ist die Parallele zu der Zentrale und irgend eine zweite Gerade gezogen; zu beweisen, daß von den beiden Kreisen auf der Parallelen die größere Strecke abgeschnitten wird. Ziehe von den Mittelpunkten die Senkrechten auf die Geraden.

72) Auf zwei durch den einen Schnittpunkt zweier Kreise gehenden Geraden werden von den Kreisen Strecken abgeschnitten, welche von dem andern Schnittpunkte aus unter gleichen Winkeln erscheinen.

Der Schnittpunkt der Kreise, durch welchen die Geraden gezogen sind, liegt auf den von den Kreisen abgeschnittenen Strecken selbst oder auf deren Verlängerungen.

73) Wird durch den Berührungspunkt zweier Kreise eine Gerade gezogen, so schneidet sie auf den Kreisen Bogen ab, über welche bezüglich gleich Mittelpunktswinkel stehen.

74) Wenn zwei Gerade durch den Berührungspunkt zweier Kreise gehen, so sind die Sehnen, welche die von ihnen eingeschlossenen Bogen überspannen, parallel.

75) Zwei Kreise A und B berühren sich von außen in C und eine Gerade in den Punkten D und E; die gemeinschaftliche Tangente in C schneide DE in P. Beweise,

a) daß P die Mitte von DE ist;

b) daß AB von P aus unter einem rechten Winkel erscheint;
c) daß DE das geometrische Mittel zwischen den Halbmessern beider Kreise ist;
d) daß der über DE als Durchmesser beschriebene Kreis die Zentrale AB in C und der über AB als Durchmesser stehende Kreis DE in P berührt.

76) Zwei Kreise M und M' berühren sich von innen in A; eine Tangente des kleineren Kreises mit dem Berührungspunkte B schneidet den größeren in C und D. Beweise, daß AB den Winkel CAD halbiert. **213. 76.**

---

77) Ähnlichkeitspunkte zweier Kreise nennt man diejenigen Punkte, welche die Zentrale innen oder außen im Verhältnisse der Halbmesser teilen. Der eine Ähnlichkeitspunkt heißt der innere, der andere der äußere. Berühren sich zwei Kreise, so fällt der eine Ähnlichkeitspunkt in den Berührungspunkt. Die Ähnlichkeitspunkte konzentrischer Kreise fallen in den Mittelpunkt.

78) Aus den Halbmessern (R, r) zweier Kreise und der Zentrale (c) die Abstände der Ähnlichkeitspunkte von den Mittelpunkten zu berechnen.

R = 30; 20; 15; 40; 50;
r = 20; 10; 10; 30; 20;
c = 60; 30; 20; 10; 15.

79) Zieht man in zwei Kreisen irgend zwei parallele und gleichgerichtete Halbmesser, so geht die Verbindungslinie ihrer Endpunkte durch den äußeren Ähnlichkeitspunkt.

80) Zieht man in zwei Kreisen irgend zwei parallele und entgegengesetzt gerichtete Halbmesser, so geht die Verbindungslinie ihrer Endpunkte durch den inneren Ähnlichkeitspunkt.

81) Eine Gerade durch einen Ähnlichkeitspunkt, welche den einen Kreis berührt, berührt auch den andern.

82) Schneidet eine Gerade durch einen Ähnlichkeitspunkt den einen Kreis, so schneidet sie auch den andern. Die nach den Schnittpunkten gezogenen Halbmesser sind paarweise parallel. Die Mittelpunktswinkel über den Sehnen sind gleich. Die auf der Geraden liegenden Sehnen verhalten sich wie die Halbmesser.

83) Die sechs Ähnlichkeitspunkte dreier Kreise liegen auf vier Geraden. IX. Anh., A. 35 Umk.

84) a. Berührt ein Kreis A zwei andere Kreise B und C gleichartig (d. h. beide von außen oder beide von innen), so geht die Verbindungslinie der Berührungspunkte durch den äußeren Ähnlichkeitspunkt der letzteren Kreise.

b. Berührt ein Kreis A zwei andere Kreise B und C ungleichartig (d. h. den einen von außen, den anderen von innen), so geht die Verbindungslinie der Berührungspunkte durch den inneren Ähnlichkeitspunkt der letzteren Kreise.

c. Das Rechteck aus den Abständen des Ähnlichkeitspunktes von den Berührungspunkten (a, b) ist gleich dem Rechteck aus den Abständen des Ähnlichkeitspunktes von dem nächsten Punkte des kleineren und dem fernsten Punkte des größeren Kreises. A. 82. **198. 52. 146.**

XVII. Anhang.

Konstruktionsaufgaben.

1—8) Konstruiere den geometrischen Ort für die Mittelpunkte der Kreise,

1) welche einen gegebenen Halbmesser haben und durch einen gegebenen Punkt gehen;
2) welche durch zwei gegebene Punkte gehen;
3) welche eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berühren;
4) welche einen gegebenen Halbmesser haben und eine gegebene Gerade berühren;
5) welche zwei sich schneidende Gerade berühren;
6) welche zwei parallele Gerade berühren;
7) welche einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berühren;
8) welche einen gegebenen Halbmesser haben und einen gegebenen Kreis von außen (von innen) berühren.
9) Zu einem gegebenen Kreisbogen den Mittelpunkt zu suchen. 2.

10—17) Mit gegebenem Halbmesser einen Kreis zu zeichnen,

10) welcher durch zwei gegebene Punkte geht (1, 1; oder 1, 2);

11) welcher eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt (1, 3);

12) welcher durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade berührt (1, 4);

13) welcher zwei sich schneidende Gerade berührt (4, 5 oder 4, 4);

14) welcher einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berührt (1, 7; oder 7, 8);

15) welcher durch einen gegebenen Punkt geht und einen gegebenen Kreis berührt;

16) welcher einen gegebenen Kreis und eine gegebene Gerade berührt;

17) welcher zwei gegebene Kreise berührt.

18) Einen Kreis zu zeichnen, dessen Mittelpunkt auf einer gegebenen Linie liegt und welcher eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt.

19—24) Einen Kreis zu konstruieren,

19) welcher durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade in einem bestimmten Punkte berührt;

20) welcher durch einen gegebenen Punkt und einen gegebenen Kreis in einem bestimmten Punkte berührt;

21) welcher zwei gegebene Parallelen berührt und durch einen gegebenen Punkt geht;

22) welcher drei gegebene Gerade berührt (4 Kreise);

23) welcher zwei gegebene Gerade und zwar die eine in einem gegebenen Punkte berührt;

24) welcher einen gegebenen Kreis in einem bestimmten Punkte und eine gegebene Gerade berührt.

25) Einem gegebenen Kreissektor einen Kreis einzuschreiben.

26) Einen Kreis zu konstruieren, welcher drei gegebene gleiche Kreise berührt. 2 Kreise.

27) Einen Kreis zu konstruieren, welcher zwei gegebene konzentrische Kreise berührt und durch einen auf einem derselben (oder zwischen denselben) gegebenen Punkt geht.

28) In einem Kreise eine Sehne in gegebener Richtung so zu ziehen, daß sie von einer gegebenen Sehne halbiert wird. A. 11 auf Seite 63.

29) Durch einen Punkt P außerhalb eines Kreises ist die Sekante PAB gezogen; durch P eine zweite Sekante so zu legen, daß die zwischen beiden Sekanten liegenden Bogen sich wie 1 : 2 verhalten. **211.**

30) Auf einer gegebenen Kreislinie einen Punkt zu bestimmen, dessen Entfernungen von zwei gegebenen Punkten der Kreislinie ein gegebenes Verhältnis haben. (4 Punkte.)

31) Einen Punkt zu konstruieren, von dem aus drei gegebene Kreise unter gleichen Winkeln erscheinen.

Zur Analysis benütze **146.** A. 21 auf Seite 39.

---

32) Den geometrischen Ort für die Mittelpunkte der Kreise zu konstruieren, welche einen gegebenen Halbmesser haben und von einer gegebenen Geraden Sehnen von gegebener Länge abschneiden.

33) Mit gegebenem Halbmesser einen Kreis zu zeichnen, welcher eine gegebene Gerade berührt und auf einer zweiten Geraden eine Sehne von gegebener Länge abschneidet.

34) Mit gegebenem Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, welcher einen gegebenen Kreis von außen berührt und auf einer gegebenen Geraden eine Sehne von gegebener Länge abschneidet.

35) Mit gegebenem Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, welcher durch einen gegebenen Punkt und von welchem eine gegebene Gerade einen Bogen mit gegebenem Mittelpunktswinkel abschneidet.

---

36) An einen Kreis durch einen Punkt desselben die Tangente zu legen.

37) An einen Kreis durch einen Punkt außerhalb desselben die Tangenten zu ziehen.

Analysis. Berührt eine von dem Punkte A an den Kreis M gezogene Tangente den Kreis in X, so ist $\wedge$ AXM = R. Somit ist der Kreis über AM als Durchmesser ein Ort für den Berührungspunkt; ein zweiter Ort hiefür ist die gegebene Kreislinie.

38—39) An einen Kreis eine Tangente zu ziehen,

38) welche zu einer gegebenen Geraden parallel läuft;

39) welche mit einer gegebenen Geraden einen gegebenen Winkel bildet.

40) Mit **214** oder **209** die mittlere geometrische Proportionale zweier Strecken zu konstruieren.

41) Eine gegebene Strecke a stetig zu teilen.

Auflösung. Beschreibe über a als Durchmesser einen Kreis, lege an denselben eine Tangente gleich a, verbinde deren Endpunkt mit dem Mittelpunkt und trage den äußeren Abschnitt der Sekante von der Tangente ab.

42) An zwei gegebene Kreise die gemeinschaftlichen Tangenten zu legen.

Analysis 1) Der Schnittpunkt der Tangenten mit der Zentrale kann gezeichnet werden. Seite 38, A. 3 und 2. A. 37.

2) Um die Richtung einer gemeinschaftlichen Tangente zu bestimmen, ziehe die Halbmesser nach den Berührungspunkten und durch den Mittelpunkt des kleineren Kreises die Parallele zur gesuchten Tangente. Der Abstand dieser Parallelen von dem Mittelpunkte des größeren Kreises ist gegeben. — Determination!

43—44) Es sind drei Punkte A, B, C gegeben. Durch A eine Gerade, welche die Strecke BC nicht schneidet, so zu legen,

43) daß die von B und C darauf gefällten Senkrechten eine gegebene Summe haben;

44) daß die von B und C darauf gefällten Senkrechten eine gegebene Differenz haben.

Zu 43). Der Abstand der gesuchten Geraden von der Mitte der Strecke BC ist gegeben.

Zu 44). Die Richtung der gesuchten Linie kann konstruiert werden.

45—46) Drei Punkte A, B, C sind gegeben. Durch A eine Gerade, welche die Strecke BC schneidet, so zu legen,

45) daß die von B und C darauf gefällten Senkrechten eine gegebene Summe haben (A. 44);

46) daß die von B und C darauf gefällten Senkrechten eine gegebene Differenz haben (A. 43).

47—49) An einen gegebenen Kreis eine Tangente so zu ziehen, daß die von zwei gegebenen Punkten darauf gefällten Senkrechten

47) ein gegebenes Verhältnis, oder

48) eine gegebene Summe, oder

49) eine gegebene Differenz haben. (Je zwei Fälle.)

50—51) Durch den einen Schnittpunkt A zweier Kreise M und N eine Gerade so zu legen, daß die auf derselben von den Kreisen abgeschnittenen Sehnen

50) eine gegebene Summe, oder

51) eine gegebene Differenz haben.

Je zwei Fälle. Fällt man auf die gesuchte Gerade von M und N die Senkrechten und errichtet zu ihr die Senkrechte in A, so kann die Aufgabe auf 43, 44, 45 oder 46 zurückgeführt werden.

52) Den geometrischen Ort für die Halbierungspunkte aller gleichen Sehnen eines Kreises zu konstruieren.

53) Durch einen Punkt eine Gerade so zu ziehen, daß die auf ihr von einem gegebenen Kreise abgeschnittene Sehne von gegebener Länge ist.

54) In einem Kreise eine Sehne von gegebener Länge und gegebener Richtung zu ziehen.

55) In einem Kreise eine Sehne in gegebener Richtung so zu ziehen, daß der über ihr stehende Mittelpunktswinkel einem gegebenen Winkel gleich wird.

56) In einem Kreis eine gegebene Strecke als Sehne so einzutragen, daß sie von einer gegebenen Sehne halbiert wird.

57) Zwei Kreise sind gegeben. An den einen eine Tangente so zu legen, daß auf ihr durch den anderen eine Sehne von gegebener Länge abgeschnitten wird.

58) Durch zwei gegebene Kreise eine Sekante so zu ziehen, daß die auf ihr von den Kreisen abgeschnittenen Sehnen gegebene Längen haben. 42.

---

59) Den geometrischen Ort für die Punkte zu konstruieren, von denen aus der Abstand zweier festen Punkte (A, B) unter einem gegebenen Winkel (α) erscheint; oder: d. g. O. für die Spitzen der Dreiecke zu zeichnen, welche dieselbe Grundlinie und einen gegebenen Winkel an der Spitze haben.

Analysis. Zieht man durch den einen Punkt A einen Strahl AX so, daß $\wedge$ XAB = α wird, so berührt der gesuchte Kreisbogen AX in A. Für den Mittelpunkt des Bogens können somit nach 3) und 2) zwei Ortslinien gezeichnet werden. — Zwei Kreisbogen.

60) Auf einer gegebenen Geraden einen Punkt zu bestimmen, von dem aus der Abstand zweier Punkte unter einem gegebenen Winkel erscheint.

61) Einen Punkt zu bestimmen, von dem aus zwei der Größe und Lage nach gegebene Strecken unter gegebenen Winkeln gesehen werden.

62) Innerhalb eines Dreieckes einen Punkt zu bestimmen, von dem aus die drei Seiten eines Dreieckes unter gleichen Winkeln gesehen werden.

63) Auf einem Kreisbogen, begrenzt durch die Punkte A und B, einen Punkt zu suchen, dessen Entfernungen von A und B eine gegebene Summe (Differenz) haben. Seite 66, A. 38.

64) Um einen gegebenen Punkt einen Kreis zu beschreiben, so daß die von zwei anderen gegebenen Punkten an ihn gelegten Tangenten einen gegebenen Winkel einschließen. XVI. Anh., A. 37.

Ein Dreieck zu konstruieren aus:

65) a, α, h_a. — 60; 120°; 25 [30; 35].

66) p, q, $\alpha + \gamma$. — 30; 20; 120°.

67) a, α, m_a. — 50; 45°; 30 [40].

68) a + b + c, α, h_a. — 120; 60°; 30.

69) a, α, b : c. — 70; 75°; 3 : 2.

70) b, β, $\wedge$ (a m_b).

71) a, α, b $\pm$ c. XVI. Anh., A. 38. Vergl. Seite 25, A. 73 und 74.

72) β, p : q, h_b.

73) Ein Dreieck in ein anderes von gegebener Grundlinie (Höhe) und gegebenem Winkel an der Spitze zu verwandeln.

74) Ein Parallelogramm zu konstruieren, von dem ein Winkel und die beiden Diagonalen gegeben sind.

75) Ein Parallelogramm zu konstruieren, von dem ein Winkel, eine Diagonale und der Winkel der Diagonalen gegeben sind. (Zwei Fälle.)

76) Ein Parallelogramm zu zeichnen, von dem eine Seite, die zugehörige Höhe und der Winkel der Diagonalen gegeben sind.

77) Ein Dreieck zu konstruieren, welches einem gegebenen ähnlich ist und dessen Seiten durch drei gegebene (nicht in einer Geraden liegende) Punkte gehen. — Unendlich viele Dreiecke.

78) Ein gegebenes Dreieck so zu legen, daß dessen drei Seiten (bezw. deren Verlängerungen) durch drei gegebene Punkte gehen. 77. 50.

---

79) Auf einem Kreise ist ein Punkt gegeben. Den geometrischen Ort derjenigen Punkte zu konstruieren, welche die von dem gegebenen Punkte ausgehenden Sehnen (innen oder außen) nach einem gegebenen Verhältnisse (m : n) teilen.

$$m : n = 3 : 2 \; [2 : 3;\; 1 : 1].$$

Auflösung. Der gesuchte Ort ist eine Kreislinie, welche die gegebene in dem gegebenen Punkte berührt.

Bemerkung. 1) Der gegebene Punkt ist ein Ähnlichkeitspunkt beider Kreise (Seite 70, A. 77). Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises teilt den Halbmesser nach dem gegebenen Punkte innen oder außen nach dem gegebenen Verhältnisse m : n und der Halbmesser des gesuchten Kreises verhält sich zu dem des gegebenen Kreises wie m : (m + n) oder m : (m — n). Abbildung eines Kreises in Bezug auf einen gegebenen Punkt als Ähnlichkeitspunkt nach dem Verhältnisse m : (m ± n).

2) Liegt der gegebene Punkt innerhalb oder außerhalb des Kreises, so ist der geometrische Ort für die Punkte, welche dessen Verbindungsstrecken mit den Kreispunkten nach einem gegebenen Verhältnisse teilen, ein Kreis von gleicher Eigenschaft.

80) In einem Kreise ist eine Sehne gegeben. Durch einen gegebenen Punkt der Kreislinie eine Sehne zu ziehen, welche von der gegebenen nach dem Verhältnisse m : n (1 : 1; 2 : 3) geteilt wird. A. 79, oder A. 25 auf Seite 40.

81) Es sind zwei Kreise M und N gegeben und auf dem Umfange von M ein Punkt A; durch A eine Gerade so zu legen, daß die Sehne AX sich zu der zwischen beiden Kreisen liegenden Strecke XY wie m : n verhält.

82—83) Es sind zwei Kreise M und N und auf ersterem ein Punkt A gegeben. Durch diesen eine Gerade so zu ziehen,

82) daß die von dem Kreise M abgeschnittene Sehne der zwischen beiden Kreisen liegenden Strecke gleich wird;

83) daß die von dem Kreise abgeschnittene Sehne zu der zwischen beiden Kreisen liegenden Strecke in dem gegebenen Verhältnisse m : n steht.

84) In einem Kreise eine Sehne zu ziehen, welche von zwei gegebenen Halbmessern in drei gleiche Teile geteilt wird.

85) Durch einen gegebenen Punkt innerhalb (außerhalb) eines Kreises eine Gerade so zu ziehen, daß die auf ihr abgeschnittene Sehne von dem gegebenen Punkte nach dem Verhältnisse m : n geteilt wird. A. 79, Bem. 2.

86) Durch den einen Schnittpunkt zweier Kreise eine Gerade so zu ziehen, daß die auf derselben von den Kreisen abgeschnittenen Sehnen gleiche Länge (ein gegebenes Verhältnis) haben.

87—96) Ein Dreieck zu konstruieren aus:

87) b, α, $\wedge$ (a m_a); 88) b, β, $\wedge$ (b m_a);
89) b, β, m_a; 90) b, m_b, $\wedge$ (a m_a);
91) a, c, m_b (vergl. A. 43 auf Seite 41);
92) α, m_b, m_c; 93) a : c, b, m_a;
94) a, b, w_c (141); 95) b, β, $\wedge$ (m_a m_c);
96) b, β, $\wedge$ (m_a m_b).

97) Ein Dreieck zu zeichnen, wenn gegeben sind: der Schwerpunkt, eine Ecke und zwei Kreise, auf welchen je eine der beiden anderen Ecken liegen soll.

98) Um ein Dreieck ein anderes zu zeichnen, von welchem zwei Winkel gegeben sind und das Verhältnis der Abschnitte, in welche eine Seite durch den Endpunkt des gegebenen Dreieckes geteilt wird. 77; 79.

99) Einen Kreis zu konstruieren, welcher zwei sich schneidende Gerade berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

Die Kreise, welche die zwei gegebenen Geraden berühren, haben den Schnittpunkt A der Geraden zum Ähnlichkeitspunkt. Zeichnet man einen derselben und schneidet die Gerade, welche A mit dem gegebenen Punkt P verbindet, den gezeichneten Kreis in X (X_1), so ist dieser nach dem Verhältnisse AX : AP (AX_1 : AP) abzubilden.

100) Zwei Kreise sind gegeben. Auf dem einen Kreise einen Punkt X und auf dem anderen einen Punkt Y so zu bestimmen, daß XY eine gegebene Länge und eine gegebene Richtung hat. (Durch Parallelverschiebung.)

---

101) Einen Kreis zu konstruieren, welcher eine gegebene Gerade in einem bestimmten Punkte und einen gegebenen Kreis berührt.

Man stelle sich vor, der gegebene Kreis nehme ab, während gleichzeitig der gesuchte Kreis mit Beibehaltung seines Mittelpunktes sich so ändere, daß er stets den kleineren Kreis berühre. Die dieser Bewegung folgende Tangente wird sich parallel zu ihrer ursprünglichen Richtung verschieben und, wenn der gegebene Kreis auf seinen Mittelpunkt zusammengeschrumpft ist, von ihrer ursprünglichen Lage um eine Strecke, gleich dem Halbmesser des gegebenen Kreises, abstehen. Die Aufgabe ist hiedurch auf A. 19 zurückgeführt.

102) Einen Kreis zu zeichnen, welcher einen gegebenen Kreis berührt, durch einen gegebenen Punkt geht und dessen Mittelpunkt auf einer durch den Punkt gezogenen Geraden liegt.

Die Aufgabe läßt sich in ähnlicher Weise wie 101 auf eine einfachere zurückführen.

103) Einen Kreis zu konstruieren, welcher zwei gegebene Kreise berührt und zwar den einen in einem gegebenen Punkte.

104) Einen Kreis zu konstruieren, welcher zwei gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt. A. 99.

105) Einen Kreis zu konstruieren, welcher durch zwei gegebene Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt.

Bestimme mit **214** den Punkt, in welchem der Kreis die Gerade berührt. Seite 39, A. 9. — 2 Kreise.

Welche Lage in Bezug auf die Gerade müssen die Punkte haben?

Wie ändert sich die Konstruktion, wenn die Verbindungslinie der gegebenen Punkte zu der gegebenen Geraden parallel ist?

106) Einen Kreis zu konstruieren, welcher durch zwei gegebene Punkte A und B geht und einen gegebenen Kreis M berührt.

Analysis. Die gemeinschaftliche Tangente des gesuchten und des gegebenen Kreises treffe AB in P. Schneidet irgend eine durch P gezogene Gerade den Kreis M in X und Y, so liegen X, Y, A, B auf einem Kreise (Seite 67, A. 55). Somit erhält man den Punkt P, indem man durch A und B einen Kreis legt, welcher den Kreis M schneidet, und die gemeinschaftliche Sehne dieser Kreise bis zum Schnitte mit AB verlängert. Der gesuchte Kreis berührt den gegebenen Kreis M in den Berührungspunkten der von P an den Kreis M gezogenen Tangenten.

107) Einen Kreis zu konstruieren, welcher eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

Analysis. Ziehe in dem gegebenen Kreise den Durchmesser, welcher auf der gegebenen Geraden senkrecht steht, und verbinde den von der Geraden entfernteren Endpunkt des Durchmessers mit dem gegebenen Punkte. Der zweite Schnittpunkt dieser Verbindungslinie mit dem gesuchten Kreise kann konstruiert werden.

Es liegt nämlich der eine Endpunkt des konstruierten Durchmessers mit den Punkten, in welchen der gesuchte Kreis die gegebene Gerade und den gegebenen Kreis berührt, in einer Geraden. Seite 69, A. 73. **206. — 146. 212.**

Seite 39, A. 7. A. 105.

108) Einen Kreis zu konstruieren, welcher zwei gegebene Kreise und eine gegebene Gerade berührt.

Die Aufgabe kann auf 107 zurückgeführt werden. — 4 Kreise.

109) Einen Kreis zu konstruieren, welcher zwei gegebene Kreise berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

Die Aufgabe kann auf A. 106 zurückgeführt werden. Die Verbindungslinie der Punkte, in welchen der gesuchte Kreis die gegebenen berührt, geht durch den äußeren oder inneren Ähnlichkeitspunkt der gegebenen Kreise. Verbindet man einen solchen mit dem gegebenen Punkte, so kann der Schnittpunkt dieser Geraden mit einem gesuchten Kreis konstruiert werden. XVI. Anh., A. 84.

Im allgemeinen vier Lösungen.

110) Einen Kreis zu konstruieren, welcher drei gegebene Kreise berührt.

Zur Analysis vergleiche 101. A. 108.

Es gibt im allgemeinen acht Lösungen.

111) Es sind zwei sich schneidende Gerade und auf der einen zwei Punkte A und B gegeben; auf der anderen einen Punkt X so zu bestimmen, daß $\wedge$ AXB so groß wie möglich wird. A. 105.

Wie ändert sich die Lösung, wenn die gegebenen Geraden parallel sind?

112) Es sind zwei Punkte A und B gegeben und ein Kreis, welcher die beiden Punkte ausschließt (einschließt); auf der Kreislinie einen Punkt X so zu bestimmen, daß $\wedge$ AXB so groß (so klein) als möglich wird. A. 106.

XVIII. Anhang.

Übungen zu 236—262.

1) Die Winkel, unter welchen die Seiten eines Dreieckes vom Mittelpunkt des umgeschriebenen (eingeschriebenen) Kreises aus erscheinen, durch die Dreieckswinkel auszudrücken.

2) Die Halbierungslinie des Winkels α und die Mittelsenkrechte der Gegenseite BC eines Dreieckes ABC schneiden sich in einem Punkte des umgeschriebenen Dreieckes unter einem Winkel $= \frac{1}{2} (\beta - \gamma)$.

3) In einem Dreiecke ist der Abstand des Mittelpunktes des umgeschriebenen Kreises von einer Seite gleich dem halben oberen Abschnitte der zu derselben Seite gehörigen Höhe.

Fälle vom Mittelpunkte auf zwei Seiten die Senkrechten, verbinde deren Fußpunkte und ziehe auf dieselben Seiten die Höhen. 146.

4) In einem Dreiecke liegen der Höhenschnittpunkt, der Schwerpunkt und der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises auf einer Geraden. Der Schwerpunkt teilt den Abstand der beiden anderen Punkte nach dem Verhältnisse 2 : 1. — 146; A. 3; 159.

5) a. In einem Dreiecke ist die Strecke, welche die Mitte einer Seite mit der Mitte des oberen Abschnittes der zur Seite gehörigen Höhe verbindet, gleich dem Radius des umgeschriebenen Kreises. A. 3; 115.

b. Diese drei Verbindungsstrecken eines Dreieckes schneiden sich in der Mitte F der Strecke, welche den Höhenschnittpunkt H mit dem Mittelpunkt M des umgeschriebenen Kreises verbindet.

c. Der Punkt F ist der Mittelpunkt des Kreises, welcher durch die drei Seitenmitten, die drei Fußpunkte der Höhen, und die drei Mitten der oberen Höhenabschnitte geht. (Neunpunktkreis, Feuerbach'scher Kreis.)

d. Der Radius des Feuerbach'schen Kreises ist halb so groß als der Radius des umgeschriebenen Kreises.

e. Der Höhenschnittpunkt (H), der Schwerpunkt (S), der Mittelpunkt des Feuerbach'schen (F) und der des umgeschriebenen Kreises (M) sind vier harmonische Punkte.

6) Fällt man auf die drei Seiten eines Dreieckes vom Mittelpunkte des umgeschriebenen Kreises die Senkrechten und verlängert diese um sich selbst, so sind die erhaltenen Punkte M_1, M_2, M_3 die Mittelpunkte der Kreise, welche durch je zwei Ecken und den Höhenschnittpunkt gehen. Diese drei Kreise sind dem umgeschriebenen Kreise gleich.

Zum Beweise benütze Satz 3.

7) Beweise, daß $\triangle M_1M_2M_3$ (A. 6) $\cong$ ABC.

8) Ist H der Höhenschnittpunkt eines Dreieckes und schneidet die Höhe AD den dem Dreiecke umgeschriebenen Kreis in E, so ist DE = DH. **199,1; 70,3.**

9) Verbindet man einen beliebigen Punkt eines Kreises, welcher einem gleichseitigen Dreiecke umgeschrieben ist, mit den drei Ecken, so ist die mittlere Verbindungsstrecke gleich der Summe der beiden äußeren.

Zum Beweise trage die eine der beiden äußeren Strecken von der mittleren ab.

10) Das Produkt zweier Seiten eines Dreieckes ist gleich dem Produkte aus dem Durchmesser des umgeschriebenen Kreises und der Höhe auf die dritte Seite. $ab = 2\,rh_c$.

Ziehe durch die gemeinsame Ecke der Dreiecksseiten den Durchmesser. **146.**

11) Aus den drei Seiten eines Dreieckes den Halbmesser des umgeschriebenen Kreises zu berechnen.

$r = \frac{abc}{4\triangle}$. — A. 10. Seite 56, A. 54.

a = 21 [15]; b = 17 [14]; c = 10 [13].

12) Aus der Seite eines gleichseitigen Dreieckes den Halbmesser des um- und des eingeschriebenen Kreises zu berechnen.

13) Die Abschnitte, in welche die Seiten eines Dreieckes durch die Berührungspunkte des eingeschriebenen und der angeschriebenen Kreise geteilt werden, sowie die Abstände der auf einer Seite gelegenen Berührungspunkte durch die Seiten a, b, c auszudrücken.

14) Aus den drei Seiten eines Dreieckes die Halbmesser (ϱ) des eingeschriebenen Kreises, sowie die Halbmesser (ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c) der angeschriebenen Kreise zu berechnen.

Zum Beweise verbinde den Mittelpunkt eines Kreises mit den Ecken und benütze 178,3 und A. 55 auf Seite 56.

$$\varrho = \frac{2\triangle}{a+b+c}; \quad \varrho_a = \frac{2\triangle}{-a+b+c}; \quad \varrho_b = \frac{2\triangle}{a-b+c}; \quad \varrho_c = \frac{2\triangle}{a+b-c}.$$

$$a = 30\ [84]; \quad 28\ [65]; \quad 26\ [40].$$

15) Beweise:

a) $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$.

b) $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c}$.

c) $\triangle = \sqrt{\varrho\,\varrho_a\,\varrho_b\,\varrho_c} = \frac{\varrho_a\,\varrho_b\,\varrho_c}{\sqrt{\varrho_a\,\varrho_b + \varrho_b\,\varrho_c + \varrho_a\,\varrho_c}}$.

d) $\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c = 4r + \varrho$.

16) Ist AD die Höhe eines rechtwinkligen Dreieckes ABC und sind ϱ, ϱ', ϱ'' die Halbmesser der den Dreiecken ABC, ABD, ACD eingeschriebenen Kreise, so ist $\varrho^2 = \varrho'^2 + \varrho''^2$.
Seite 34, A. 13a

17) Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte der eingeschriebenen Kreise derjenigen Dreiecke, welche über derselben Grundlinie stehen und in dem Winkel an der Spitze übereinstimmen. A. 1.

18) Die Fläche eines rechtwinkligen Dreieckes auszudrücken durch die Abschnitte, in welche die Hypotenuse durch den Berührungspunkt des eingeschriebenen Kreises geteilt wird.

19) Ein Dreieck hat die Seiten $a = 45$, $b = 42$, $c = 39$. Wie groß ist der Radius des Kreises, welcher b und c berührt und dessen Mittelpunkt auf a liegt?

20) Der dem Dreiecke ABC eingeschriebene Kreis berühre die Seiten in A′, B′, C′. Zu beweisen, daß $\triangle$ A′B′C′ : ABC $= \varrho : 2$ r.

Verbinde den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises mit den Berührungspunkten. A. 5 auf Seite 47; A. 14; 11.

21) Die Mittelpunkte der Kreise, welche einem Dreiecke ABC ein-, bezw. angeschrieben sind, seien mit O, O_a, O_b, O_c bezeichnet. Beweise:

a) Jede der 6 Verbindungsstrecken dieser vier Punkte wird durch den umgeschriebenen Kreis halbiert.

b) Jeder über einer dieser 6 Verbindungsstrecken als Durchmesser beschriebene Kreis geht durch zwei Ecken des Dreieckes. Die Mittelpunkte dieser Kreise liegen auf dem umgeschriebenen Kreise.

O, B, C, O_a liegen auf einem Kreise, ebenso O_b, B, C, O_c.

22) In dem umgeschriebenen Kreise eines Dreieckes wird jede Sehne, welche durch den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises geht, durch diesen Punkt so geteilt, daß das Rechteck der Sehnenabschnitte dem Rechtecke aus dem Durchmesser des umgeschriebenen Kreises und dem Halbmesser des eingeschriebenen Kreises gleich ist.

Zum Beweise ziehe durch die Ecke A des $\triangle$ ABC und den Mittelpunkt O des eingeschriebenen Kreises die Sehne, ferner den zu BC senkrechten Durchmesser des umgeschriebenen Kreises, verbinde die Endpunkte des letzteren mit B und fälle von O die die Senkrechte auf AB. **146.** A. 21.

23) Der Abstand der Mittelpunkte des um- und eingeschriebenen Kreises eines Dreieckes ist $= \sqrt{r(r-2\varrho)}$. A. 22.

---

24) Schneiden zwei Kreise, welche durch die Ecken A und B eines Dreieckes ABC gehen, die Seiten BC und AC in A′, B′, bezw. in A″, B″, so ist A′B′ ∥ A″B″.

25) In einem Sehnenvierecke ABA′B′ schneiden sich die

Seiten AB und A'B' in C, AB' und A'B in D, die Diagonalen AA' und BB' in E. Beweise:

a) Je zwei Dreiecke über zwei Gegenseiten, welche C, D oder E zur gemeinsamen Spitze haben, sind ähnlich.

b) △ AA'C ∽ B'BC; △ AA'D ∽ B'BD.

c) Die Halbierungslinien der Winkel C und D stehen aufeinander senkrecht.

d) Die Halbierungslinien der Winkel C und D teilen die Seiten des Kreisviereckes in Abschnitte, welche sich verhalten wie die anstoßenden Diagonalen.

e) Die Punkte, in welchen die Halbierungslinien den Winkel C und D die Seiten schneiden, sind die Ecken einer Raute.

f) Die Gerade, welche durch den Schnittpunkt zweier gegenüberliegender Seiten geht und deren Winkel halbiert, schneidet auf den beiden Diagonalen von deren Schnittpunkt aus gleiche Strecken ab. **211.**

26) In einem Vierecke ABCD ist AB = AD = BD und $\wedge$ BCD = 120°. Beweise, daß dieser Winkel durch die Diagonale AC halbiert wird.

27) Die Halbierungslinien der Winkel eines Viereckes schließen ein Kreisviereck ein.

28) Schneiden sich drei Kreise in einem Punkte O und außerdem paarweise in den Punkten A, B und C, und treffen die Geraden, welche einen beliebigen Punkt des Kreises OAB mit A und B verbinden, die Kreise OAC und OBC in Q und R, so liegen Q und R mit C auf einer Geraden.

29) Das Produkt der Abstände eines beliebigen Punktes eines Kreises von zwei Gegenseiten eines eingeschriebenen Viereckes ist gleich dem Produkte der Entfernungen desselben Punktes von den beiden anderen Seiten des Viereckes. **245 Umk.; 199; 146.**

30) Der Abstand eines Punktes eines Kreises von einer Sehne ist das geometrische Mittel zwischen den Entfernungen des Punktes von den Tangenten, welche in den Endpunkten der Sehne an den Kreis konstruiert werden können. **245 Umk.; 199; 146.**

Der Satz läßt sich umkehren.

31) Fällt man auf die Seiten eines Dreieckes bezw. deren Verlängerungen von einem beliebigen Punkte des umgeschriebenen

Kreises die Senkrechten, so liegen deren Fußpunkte in einer Geraden. — Der Satz läßt sich umkehren.

32) Ueber den Seiten eines Dreieckes ABC seien die gleichseitigen Dreiecke ABC', ACB', BCA' konstruiert. Beweise,

a) daß die den drei gleichseitigen Dreiecken umgeschriebenen Kreise sich in einem Punkte P schneiden, von dem aus die Seiten des Dreieckes ABC unter gleichen Winkeln erscheinen;

b) daß AA', BB' und CC' sich in P schneiden;

c) daß AA' = BB' = CC'.

33) Werden die Seiten eines Dreieckes bezw. deren Verlängerungen durch eine Gerade geschnitten und werden den vier entstandenen Dreiecken Kreise umgeschrieben, so gehen diese durch einen Punkt.

Es ist zu zeigen, daß der Schnittpunkt zweier Kreise auf jedem der beiden anderen liegt.

34) Wenn vier Kreise sich zu zweien in Punkten eines und desselben Kreises schneiden, so liegen die vier zweiten Schnittpunkte derselben auch auf einem Kreise.

35) In einem eingeschriebenen Vielecke von gerader Eckenzahl ist die Summe des ersten, dritten, fünften u. s. w. Winkels gleich der Summe des zweiten, vierten, sechsten u. s. w. Winkels. (Ziehe die Halbmesser. 77.)

36) In einem umgeschriebenen Vielecke von gerader Seitenzahl ist die Summe der ersten, dritten, fünften u. s. w. Seite gleich der Summe der zweiten, vierten, sechsten u. s. w. Seite. 216.

37) Zwei Gegenseiten eines umgeschriebenen Viereckes erscheinen vom Mittelpunkt des Kreises aus unter supplementären Winkeln.

38) Einem Kreise ist ein Viereck eingeschrieben, in welchem die Diagonalen auf einander senkrecht stehen. Beweise:

Die Fußpunkte der von dem Diagonalenschnittpunkt auf die Seiten gefällten Senkrechten sind die Ecken eines Viereckes, um und in welches sich ein Kreis beschreiben läßt.

Dieser Kreis geht durch die Mitten der Seiten des Vierecks und sein Mittelpunkt ist die Mitte der Strecke, welche den Diagonalenschnittpunkt des gegebenen Viereckes mit dem Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises verbindet.

39) Zu zwei Bogen AB und AC eines Kreises gehören die Sehnen a und b. Wie groß ist die Sehne, welche die Differenz (Summe) beider Bogen überspannt?

Ziehe den Durchmesser AD und verbinde D mit B und C.

40) Das Verhältnis der Diagonalen eines eingeschriebenen Viereckes durch die Seiten auszudrücken.

Bestimme nach A. 10 die Senkrechten von den Ecken auf die Diagonalen und berechne nach **178,3** auf zweifache Art die Fläche des Viereckes, oder vertausche auf jede mögliche Art die Seiten des Viereckes und benütze **247**.

41) Die Diagonalen eines eingeschriebenen Viereckes durch die Seiten auszudrücken.

A. 41 und **247**; oder fälle von zwei gegenüberliegenden Ecken auf zwei Gegenseiten die Senkrechten, und wende **146**, **184** und **185** an.

$$a = 300,\ b = 195,\ c = 91,\ d = 80.$$

42) Die Fläche des eingeschriebenen Viereckes aus den vier Seiten zu berechnen.

Zerlege das Viereck durch eine Diagonale in zwei Dreiecke und berechne in diesem die Höhen, welche auf zwei Gegenseiten des Viereckes gefällt sind (**182**, **184**, **185**, **146**,) oder benütze die Heronische Formel und A. 41.

$$F = \sqrt{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)\,(s-d)},\ \text{wenn}$$

$$s = \tfrac{1}{2}\,(a + b + c + d).$$

$$a = 34\ [66];\ b = 27\ [54];\ c = 18\ [42];\ d = 7\ [18].$$

43) Aus den Seiten eines Kreisviereckes den Halbmesser r des Kreises zu bestimmen.

Benütze zweimal 11, ferner 41 und 42.

44) Vertauscht man die Seiten a, b, c, d eines Kreisviereckes, so erhält man noch zwei andere Vierecke von gleicher Fläche. Bezeichnen f, g, h die Diagonalen der drei Vierecke, so ist

$$r = \frac{f\,g\,h}{4\,F}.$$

45) Sind a, b, c, d die Seiten eines ein- und umgeschriebenen Viereckes, so ist

$$F = \sqrt{abcd};\quad r = \frac{\sqrt{(ab + cd)\,(ac + bd)\,(ad + bc)}}{4\,F};$$

$$\varrho = \frac{2\sqrt{abcd}}{a+b+c+d} = \frac{\sqrt{abcd}}{a + c} = \frac{\sqrt{abcd}}{b+d}.$$

46) Aus der Seite a eines regulären Polygons und dem Radius r des umgeschriebenen Kreises den Radius ϱ des eingeschriebenen Kreises zu berechnen.

47) Aus dem Halbmesser r eines Kreises die Seite des eingeschriebenen regulären Drei-, Fünf-, Acht-, Zwölf-, Fünfzehn-, Sechszehn-, Vierundzwanzigeckes zu berechnen.

$$s_3 = r\sqrt{3};\ s_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}};\ s_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}};\ s_{12} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$= \frac{r}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2});\quad s_{15} = \frac{r}{4}(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{3} - \sqrt{15})\ [A.\ 39];$$

$$s_{16} = r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}};\quad s_{24} = r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}.$$

48) Aus dem Radius ϱ eines Kreises die Seite des umgeschriebenen regulären Drei-, Fünf-, Sechs-, Acht-, Zehn-, Zwölfeckes zu berechnen.

$$t_3 = 2\varrho\sqrt{3};\quad t_5 = 2\varrho\sqrt{5 - 2\sqrt{5}};\quad t_6 = \tfrac{2}{3}\varrho\sqrt{3};$$

$$t_8 = 2\varrho(\sqrt{2} - 1);\quad t_{10} = 2\varrho\sqrt{1 - 2\sqrt{\tfrac{1}{5}}};\quad t_{12} = 2\varrho\ (2 - \sqrt{3}).$$

49) Aus der Seite a des regulären Drei-, Vier-, Fünf-, Acht-, Zehn-, Zwölfeckes den Halbmesser des umgeschriebenen Kreises zu berechnen.

50) Aus der Seite a des regulären Drei-, Vier-, Fünf-, Sechs-, Acht-, Zehn-, Zwölfeckes den Halbmesser des eingeschriebenen Kreises zu berechnen.

51) In einem Kreise M ist zum Durchmesser AB der senkrechte Halbmesser MC gezogen, C mit der Mitte D von AM verbunden und auf DB die Strecke DC = DE abgetragen. Berechne ME und CE. — ME = s_{10}; CE = s_5.

52) Die Diagonale des regulären Fünfeckes aus der Seite zu berechnen. **247.**

53) Die Diagonalen des regulären Zehneckes aus dem Halbmesser r des umgeschriebenen Kreises zu berechnen.

54) Die Diagonalen des regelmäßigen Achteckes zu berechnen.

55) Eine Diagonale des regelmäßigen Fünfeckes wird von einer zweiten, welche mit ihr keine Ecke gemein hat, nach dem goldenen Schnitte geteilt.

56) Verlängert man zwei nicht anliegende Seiten eines regulären Fünfeckes bis zu ihrem Schnittpunkte, so erhält man ein gleichschenkliges Dreieck, in welchem die Grundlinie der goldene Abschnitt des Schenkels ist.

57) Die Seiten eines regulären Fünfeckes sind bis zu ihren Schnittpunkten verlängert. Wie groß sind die Seiten des Sternfünfeckes und der Halbmesser des umgeschriebenen Kreises?

58) Die Diagonalen eines regulären Fünfeckes schließen ein zweites reguläres Fünfeck ein. Aus der Seite des ersteren Polygons die des letzteren zu berechnen.

59) Die Höhe eines regulären Fünfeckes zu berechnen. — $h = r + s_{10}$.

60) Zieht man in einem regulären Zehnecke $A_1 A_2 A_3 \ldots A_{10}$ die 10 Diagonalen $A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6, \ldots$, so umschließen diese ein zweites reguläres Zehneck, dessen Seite und Radien die goldenen Abschnitte der entsprechenden Strecken des ersteren Zehneckes sind.

XIX. Anhang.

Konstruktionsaufgaben.

In einem gegebenen Kreis ein Dreieck zu konstruieren, von dem gegeben sind:

1) a, b.	2) a, β.
3) α, β.	4) a, h_a.
5) α, h_a.	6) a, h_b.
7) α, h_b.	8) a, m_a.
9) α, m_a.	10) $\alpha, a + b$.
11) $a, \alpha - \beta$.	12) p, q (2 Fälle).
13) $a, \beta : \gamma = 3 : 1$.	14) $a, b + c$ (S. 66, A. 38).
15) $a + c, \beta$.	16) $a + b + c, \beta$.
17) $a - c, \beta$.	18) a, ϱ (Seite 83, A. 17).

Um einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu zeichnen, von dem gegeben sind:

19) α, β. 20) α, w_a.

21) α, b. 22) a, h_b. — γ ist durch a und h_b bestimmt.

23) α, h_a. (Seite 74, A. 42.)

24) α, $a + b + c$. Ein angeschriebener Kreis kann konstruiert werden.

25) α, $a + b - c$. Die Ecke C kann bestimmt werden.

Ein Dreieck zu konstruieren aus:

26) a, α, ϱ (S. 83, A. 17).

27) h_b, m_b, r.

28) $b + r$, β, h_b. 29) $b + r$, β, m_b.

30) ϱ_b, β, a. 31) ϱ_b, α, c.

32) ϱ_b, α, w_a. 33) ϱ_b, α, h_a.

34) α, w_a, $a + b + c$. 35) α, h_a, $a + b + c$.

36) Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade so ziehen, daß sie von den Schenkeln eines gegebenen Winkels ein Dreieck von gegebenem Umfange abschneidet.

Ein Dreieck zu konstruieren aus:

37) α, β, ϱ. 38) α, β, $r + \varrho$.

39) α, β, $r - \varrho$. 40) α, $b : c$, r.

41) α, $b : c$, ϱ. 42) α, $b : c$, $a + \varrho$.

43) $a : b : c$, r. 44) $a : b : c$, ϱ.

45) α, $h_b : h_c$, r. 46) α, $h_b : h_c$, ϱ.

47) $h_a : h_b : h_c$, r. 48) $h_a : h_b : h_c$, ϱ.

49) $b : r$, α, a. 50) $b : \varrho$, b, r.

51—52) Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, von welchem der Halbmesser des umgeschriebenen Kreises und

51) eine Seite, oder

52) eine Höhe gegeben sind.

53—56) In einen gegebenen Kreis ein Rechteck zu zeichnen,

53) dessen Umfang einer gegebenen Strecke s gleich ist;

54) dessen Seiten eine gegebene Differenz d haben;

55) dessen Seiten ein gegebenes Verhältnis haben;

56) dessen Fläche einem gegebenen Quadrate gleich ist.

57—60) Um einen gegebenen Kreis eine Raute zu zeichnen,

57) von welcher ein Winkel eine gegebene Größe hat;

58) deren Diagonalen ein gegebenes Verhältnis haben;

59) deren Seite gleich a ist;

60) deren Fläche einem gegebenen Quadrate gleich ist.

61—65) Ein Kreisviereck ABCD zu konstruieren aus;

61) $\wedge$ BAD, AB, AC, BD;

62) AC, BD, $\wedge$ BAC, $\wedge$ ABC;

63) AC, BD, $\wedge$ BAD, $\wedge$ ACB;

64) AB, BC, AC, CD $\pm$ DA;

65) $\wedge$ A, $\wedge$ B, AB : BC, BD.

66) Durch die Ecken B und C eines Dreieckes ABC einen Kreis zu legen, welcher AB und BC in E und F so schneidet, daß EF einer gegebenen Strecke gleich ist.

---

67) Einen Kreis in 4, 8, 16, . . .; 6, 3, 12, 24, . . .; 10, 5, 20, 40, . . .; 15, 30, . . . gleiche Teile zu teilen.

68) Einen Winkel von 36^0; 24^0; 12^0 zu konstruieren.

69) In (oder um) einen gegebenen Kreis ein regelmäßiges Drei-, Vier-, Fünf-, Sechs-, Acht-, Zehn-, Zwölf-, Fünfzehneck zu beschreiben.

70) Ein regelmäßiges n Eck zu konstruieren, welches eine gegebene Strecke a zur Seite hat. — X. Anh., A. 47 Bem.

n = 6; 12; 10; 5; 8; 15.

71) Ein regelmäßiges Fünfeck zu zeichnen, welches eine gegebene Diagonale hat.

72) Ein regelmäßiges Fünfeck zu konstruieren, von welchem die Summe (Differenz) aus der Seite und der Diagonale gegeben ist.

73) Ein regelmäßiges n Eck ist gegeben; ein flächengleiches regelmäßiges 2 n Eck zu konstruieren. S. 59, A. 37.

XX. Anhang.

Übungen zu 263—280.

1) Aus dem Halbmesser eines Kreises den Umfang des ein- und umgeschriebenen regelmäßigen Drei-, Vier-, Fünf-, Sechs-, Acht-, Zehn-, Zwölf-, Fünfzehn-Eckes zu berechnen.

2) Beweise, daß

$$\frac{1}{U_{2n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{U_n}\right) \text{ und } \frac{1}{u_{2n}} = \sqrt{\frac{1}{u_n} \cdot \frac{1}{U_{2n}}},$$

wenn mit u_n der Umfang des eingeschriebenen und mit U_n der des umgeschriebenen n Eckes bezeichnet wird.

Suche mit **146** für die Seiten der vier Vielecke die zwei entsprechenden Gleichungen.

Eine andere Lösung stützt sich auf **256** und **260**.

3) Die Fläche des regulären Drei-, Vier-, Fünf-, Sechs-, Acht-, Zehn-, Zwölf-Eckes aus dem Halbmesser r des umgeschriebenen Kreises zu berechnen.

$$F_3 = \tfrac{3}{4} r^2 \sqrt{3};\ F_4 = 2 r^2;\quad F_5 = \tfrac{5}{8} r^2 \sqrt{10 + 2\sqrt{5}};$$

$$F_6 = \tfrac{3}{2} r^2 \sqrt{3};\ F_8 = 2 r^2 \sqrt{2};\ F_{10} = \tfrac{5}{4} r^2 \sqrt{10 - 2\sqrt{5}};$$

$$F_{12} = 3 r^2.$$

4) Berechne die Fläche derselben Vielecke (3) aus dem Radius ϱ des eingeschriebenen Kreises.

$$F_3 = 3\varrho^2 \sqrt{3};\ F_4 = 4\varrho^2;\ F_5 = 5\varrho^2 \sqrt{5 - 2\sqrt{5}};$$

$$F_6 = 2\varrho^2 \sqrt{3};\ F_8 = 8\varrho^2(\sqrt{2} - 1);\ F_{10} = 2\varrho^2 \sqrt{25 - 10\sqrt{5}};$$

$$F_{12} = 12\varrho^2 (2 - \sqrt{3}).$$

5) Beweise nachstehende Formeln, in welchen a die Seite und F_n die Fläche des regelmäßigen n Eckes bezeichnet:

$$F_6 = \frac{3a^2}{2}\sqrt{3};\ F_{10} = \tfrac{5}{2} a^2 \sqrt{5 + 2\sqrt{5}};$$

$$F_8 = 2a^2(1 + \sqrt{2});\ F_5 = \frac{a^2}{4}\sqrt{5(2 + \sqrt{5})}.$$

6) Wie verhält sich die Fläche des eingeschriebenen regelmäßigen Sechseckes [3, 4, 8, 10, 12 Eckes] zu der des umgeschriebenen regelmäßigen Polygons von gleicher Eckenzahl?

7) Einem Kreise ($r = \sqrt{6\sqrt{3}}$) ist ein reguläres 6 Eck eingeschrieben und ein solches umgeschrieben; wie groß ist die Seite des Quadrates, welche der Fläche zwischen den Umfängen der Sechsecke gleich ist?

8) Von einem Quadrate werden die Ecken so abgeschnitten, daß ein reguläres Achteck entsteht. Berechne die Seite, die Radien und die Fläche des Achteckes?

9) Ein reguläres Fünfeck und ein reg. Zehneck haben gleiche Fläche; wie verhalten sich die Halbmesser der um- und eingeschriebenen Kreise?

10) Wie groß sind die Halbmesser der einem regulären Sechsecke um- und eingeschriebenen Kreise, wenn die Fläche des Sechseckes einem gegebenen gleichseitigen Dreiecke gleich ist?

11) Die Fläche eines eingeschriebenen regulären 2n Eckes ist das geometrische Mittel zwischen den Flächen der demselben Kreise um- und eingeschriebenen n Ecke.

12) a) Verbindet man die Mitten der aufeinander folgenden Seiten eines regulären 2n Eckes $A_1 A_2 A_3 \ldots A_{2n}$, so erhält man ein reguläres 2n Eck $B_1 B_2 B_3 \ldots B_{2n}$, welches mit dem regulären n Eck $A_1 A_3 A_5 \ldots A_{2n-1}$ gleichen Umfang hat. (Wie wird hiernach ein reguläres 2n Eck konstruiert, welches mit einem gegebenen regulären n Eck gleichen Umfang hat?)

b) Das Polygon $B_1 B_2 \ldots B_{2n}$ hat einen kleineren umgeschriebenen und einen größeren eingeschriebenen Kreis als $A_1 A_3 \ldots A_{2n-1}$.

c) Haben ein reguläres n Eck und ein reguläres 2n Eck gleichen Umfang, so hat letzteres die größere Fläche.

d) Werden die Radien der $A_1 A_3 \ldots A_{2n-1}$ um- und eingeschriebenen mit r und ϱ, die Radien des 2n Eckes $B_1 B_2 \ldots B_{2n}$ mit r' und ϱ' bezeichnet, so bestehen die Gleichungen

$$\varrho' = \tfrac{1}{2}(r + \varrho) \text{ und } r' = \sqrt{r \varrho'}.$$

---

13) Aus dem Umfange des eingeschriebenen regulären Sechseckes und des umgeschriebenen Quadrates nachzuweisen, daß π zwischen 3 und 4 liegt.

14) Um wie viel unterscheidet sich der Kreisumfang von der Summe aus dem dreifachen Durchmesser und dem fünften Teil der Seite des eingeschriebenen Quadrates?

Bemerkung. Eine genaue Konstruktion des Kreisumfanges mit Zirkel und Lineal ist unmöglich.

15) Man findet den halben Kreisumfang mit großer Genauigkeit, indem man einen Durchmesser AB zieht, an den Halbmesser MA einen Mittelpunktswinkel von 30^0 anträgt, von dem Punkte C, in welchem der zweite Schenkel dieses Winkels die

Tangente in A trifft, auf dieser Geraden über A hinaus CD = 3r abschneidet und D mit B verbindet. Um wie viel unterscheidet sich BD von dem halben Umfange des Kreises?

16) Der Umfang der Erde beträgt 40 000 km; wie groß ist der Durchmesser?

17) Den Halbmesser und die Fläche eines Kreises aus dem Umfange u zu berechnen.

u = 1 m; 25 cm; 34,564 km.

18) Die Differenz der Umfänge zweier Kreise ist 4 m, die Differenz ihrer Flächen 8 qm. Wie groß sind die Halbmesser der Kreise?

19) Wie verhält sich die Fläche eines Kreises zu dem eines regelmäßigen Dreieckes (4, 6, 8, 10 Eckes) von gleichem Umfange?

20) Wie verhält sich der Umfang eines Kreises zu dem eines regelmäßigen Dreieckes (4, 6, 8, 10 Eckes) von gleicher Fläche?

21) Den Halbmesser eines Kreises zu berechnen, dessen Umfang um d = 13 cm größer als der Umfang des eingeschriebenen gleichseitigen Dreieckes?

22) Die Flächen zweier Kreise, welche ähnlichen Dreiecken eingeschrieben [umgeschrieben] sind, verhalten sich wie die Flächen der Dreiecke.

23) Wie lang ist in einem Kreise, dessen Halbmesser r 24 m mißt, ein Bogen von 75° [20° 45′]?

24) Wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, in welchem ein Bogen von 45° [15°; 20° 30′] 6,25 m [18 cm; 12,3 m] mißt?

25) Wie viel Grad zählt ein Bogen, dessen Länge gleich dem Halbmesser ist?

26) Wie groß ist der Mittelpunktswinkel eines Kreissektors, welcher mit dem Kreise gleichen Umfang hat?

27) Der Durchmesser eines Halbkreises wird in mehrere Teile geteilt und über jeder Teilstrecke, abwechselnd nach oben und unten, ein Halbkreis [Bogen von 60°] konstruiert. Wie verhält sich die Länge der entstehenden wellenförmigen Linie zu dem Halbkreisbogen?

28) Die Fläche eines Sektors von 36° in einem Kreise, dessen Halbmesser = 12 cm [68,5 cm] ist, zu berechnen.

29) Welches ist der Halbmesser eines Kreises, in welchem ein Sektor von 60° 1 qm (12,25 qcm) Flächeninhalt hat?

30) Den Halbmesser eines Kreises zu berechnen, dessen Fläche einem Sektor von 40° in einem Kreise mit dem Halbmesser r gleich ist.

31) Wie groß ist die Fläche des Sektors, dessen Bogen dem Halbmesser gleich ist?

32) Wie groß ist der Mittelpunktswinkel eines Sektors, dessen Fläche dem Quadrate über dem Halbmesser gleich ist?

33) Aus einem Kreise soll ein Sektor ausgeschnitten werden, dessen Fläche dem eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecke gleich ist; den Mittelpunktswinkel des Sektors zu berechnen.

34) Aus der Fläche f eines Sektors und der Länge l seines Bogens den Halbmesser und den Mittelpunktswinkel zu berechnen. $f = 1$ qm, $l = 1$ m; $f = 63$ qcm, $l = 11$ cm. ($\pi = 3\frac{1}{7}$).

35) Wie groß ist ein Kreisabschnitt, dessen Bogen 60° [36°; 45°; 90°; 120°] mißt, wenn der Halbmesser des Kreises = 50 cm ist?

36) Die Sehne, welche einen Bogen von 36° [60°] überspannt, mißt 1 m [8 cm]; wie groß ist die von dem Bogen und seiner Sehne begrenzte Fläche?

37) In einem Kreise mit dem Halbmesser r überspannen zwei parallele Sehnen Bogen 60° und 90°; wie groß ist der zwischen den Sehnen liegende Teil des Kreises?

38) Der Umfang eines Kreisabschnittes, dessen Bogen 60° mißt, beträgt 73 cm; wie groß ist dessen Fläche?

39) Die Ringfläche zwischen zwei konzentrischen Kreisen ist gleich einem Kreise, welcher die auf einer Tangente des kleineren Kreises von dem größeren Kreise abgeschnittene Strecke zum Durchmesser hat.

40) Die Ringfläche zwischen zwei konzentrischen Kreisen zu berechnen, wenn $R = 8$ [16,375 m] und $r = 5$ [6,375 m].

41) Die Fläche eines Kreises wird durch einen konzentrischen Kreis nach dem Verhältnisse m : n [1 : 1; 9 : 16] geteilt, wie verhalten sich die Halbmesser beider Kreise?

42) Die Fläche ein Ringsektors zwischen zwei konzentrischen

Bogen ist gleich dem Produkte aus der halben Summe der Bogen und aus der Differenz der Halbmesser.

Vergleiche hiemit 179.

43) Wird auf dem Durchmesser AB eines Kreises ein Punkt C beliebig angenommen und werden über AC und BC Halbkreise konstruiert, so ist die von den drei Kreisbogen eingeschlossene Fläche gleich der eines Kreises, welcher die halbe kleinste Sehne durch den Punkt C zum Durchmesser hat.

44) Beschreibt man um ein rechtwinkliges Dreieck einen Kreis, und über den Katheten nach außen Halbkreise, so sind die zwei von den Kreisbogen eingeschlossenen Flächen (Möndchen) zusammen so groß als das Dreieck.

45) Drei gleiche Kreise (r) berühren einander; wie groß ist die zwischen den Kreislinien liegende Fläche?

46) Um einen Punkt A auf einem Kreise M mit dem Halbmesser r ist ein Kreis beschrieben, welcher den Kreis M unter einem Durchmesser schneidet (d. h. die gemeinschaftliche Sehne ist ein Durchmesser des Kreises M). Berechne die drei von den Bogen begrenzten Flächen.

47) Zwei Kreise schneiden sich so, daß der über der gemeinschaftlichen Sehne stehende Bogen des einen $\frac{1}{6}$, der des anderen $\frac{1}{4}$ seines Kreises beträgt. Welche Fläche schließen diese Bogen ein, wenn die gemeinschaftliche Sehne 5 cm mißt?

48) Einem Quadranten (Sextanten) ist ein Kreis einbeschrieben. Wie groß sind die einzelnen Teile des Sektors?

49) Um zwei aufeinanderfolgende Ecken eines Quadrates sind mit der Quadratseite als Halbmesser Quadranten beschrieben. Wie groß sind die vier Teile, in welche das Quadrat zerlegt wird?

50) Um die 4 Ecken eines Quadrates sind Quadranten beschrieben, welche die Diagonalen berühren. Wie groß sind die Teile, in welche das Quadrat zerlegt wird?

51) Um die 4 Ecken eines Quadrates sind mit der Seite als Halbmesser Quadranten beschrieben; die Fläche des von den Kreisbogen begrenzten krummlinigen Viereckes zu bestimmen. —
$a^2 (1 + \frac{1}{3} \pi - \sqrt{3})$.

XXI. Anhang.

Übungen zu 281—298.

1) Unter allen Dreiecken, welche in der Summe zweier Seiten übereinstimmen, ist dasjenige das größte, in welchem diese Seiten gleich sind und einen rechten Winkel einschließen. 287. 283.

2) Eine gegebene Strecke so zu teilen, daß das Rechteck aus den Teilen ein Maximum wird. A. 1, oder mit A. 46 auf Seite 66.

3) Unter allen Dreiecken, welche in einer Seite und dem gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, hat das gleichschenklige a) die größte Fläche und b) den größten Umfang. Seite 66, A. 38.

4) Auf einem Kreise zu zwei gegebenen Punkten einen dritten zu suchen, so daß das Rechteck aus dessen Abständen von den gegebenen Punkten ein Maximum wird. A. 10 auf Seite 82.

5) Unter allen Dreiecken über derselben Grundlinie, deren andere Seiten in einem gegebenen Verhältnisse stehen, das größte zu suchen.

6) Unter allen Dreiecken über derselben Grundlinie, deren Spitzen in einer gegebenen, die Grundlinie nicht schneidenden Geraden liegen, hat dasjenige den kleinsten Umfang, dessen beide anderen Seiten mit der gegebenen Geraden gleiche Winkel bilden.

Fälle von dem einen Endpunkte der Grundlinie die Senkrechte auf die Gerade und verlängere diese um sich selbst.

7) Mit 6 Lehrsatz 285 zu beweisen.

8) Einem Quadrate ein Viereck mit dem kleinsten Umfange einzuschreiben, so daß eine Ecke in einen auf einer Seite gegebenen Punkt fällt. A. 6.

9) In ein spitzwinkliges Dreieck ein Dreieck mit kleinstem Umfange so einzuschreiben, daß eine Ecke in einen gegebenen Punkt fällt. A. 6.

10) Einem spitzwinkligen Dreiecke ein anderes Dreieck einzuschreiben, dessen Umfang ein Minimum ist. A. 6.

11) Einem Dreiecke ABC ein anderes DXY so einzuschreiben, daß eine Ecke in den gegebenen Punkt D auf AC fällt, XY || BC ist und seine Fläche ein Maximum wird.

Zur Analysis. Bestimme das Verhältnis von △ BXY zu △ DXY und zu △ ABC. A. 2.

12) In ein Dreieck das größte Parallelogramm mit einem gegebenen Winkel (Rechteck) einzuschreiben.

13) Unter allen Dreiecken mit demselben Winkel an der Spitze, welche in der Summe der diesen Winkel einschließenden Seiten übereinstimmen, hat das gleichschenklige die größte Fläche und die kleinste Grundlinie, also auch den kleinsten Umfang.

Wenn △ ABC mit △ DBE in der Summe der den Winkel B einschließenden Seiten übereinstimmt, ist DF || BC zu ziehen und zum Beweise der zweiten Behauptung DG ⊥ AC.

14) Innerhalb eines Winkels sei ein Punkt gegeben; eine durch diesen Punkt gezogene Gerade schneidet von dem Winkel das kleinste Dreieck ab, wenn die zwischen den Schenkeln liegende Strecke in dem gegebenen Punkte halbiert wird.

Zum Beweise ziehe zu einem Schenkel die Parallele.

15) Unter allen Dreiecken mit demselben Winkel an der Spitze und von gleicher Fläche hat das gleichschenklige den kleinsten Umfang.

Um den Umfang des gleichschenkligen Dreieckes ABC mit dem Umfange des beliebigen Dreieckes DBE von gleicher Fläche zu vergleichen, konstruiere D_1E_1 || DE, so daß $D_1B + BE_1 = AB + BC$. A. 13.

16) Unter allen Dreiecken mit demselben Winkel an der Spitze und von gleichem Umfange hat das gleichschenklige die größte Fläche. Beweis mit 13.

17) Durch einen innerhalb eines Winkels gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, so daß der Umfang des abgeschnittenen Dreieckes ein Minimum wird.

Zur Analysis konstruiere einen angeschriebenen Kreis. S. 78, A. 99.

18) Eine Figur sei von einer (beliebig langen) Geraden G und einer der Form nach willkürlichen Linie L begrenzt; zu beweisen, daß bei gegebener Länge von L die Fläche am größten, und bei gegebener Fläche die Länge von L am kleinsten ist, wenn die Figur ein Halbkreis ist.

Konstruiere zu einer Figur, welche die geforderte Eigenschaft hat, auf der anderen Seite von G eine kongruente. **295. 298.**

19) Unter allen Figuren, welche von einer Strecke a und einer willkürlich geformten Linie L begrenzt sind, hat das Kreissegment bei gegebener Länge von L die größte Fläche, und bei gegebener Fläche die kürzeste Linie L.

Ergänze das Kreissegment, welches den gegebenen Bedingungen genügt, zu einem ganzen Kreise.

20) Unter allen Vielecken mit gegebenen Seiten sind diejenigen die größten, um welche sich ein Kreis beschreiben läßt.

Ändert sich die Fläche durch Vertauschung der Seiten?

21) Die Flächen der regelmäßigen Vielecke von gleichem Umfange bilden eine steigende Reihe, welche mit dem Dreiecke beginnt und mit dem Kreise schließt. Die Umfänge der gleichen regelmäßigen Vielecke bilden vom Dreiecke bis zum Kreis eine fallende Reihe.

Das regelmäßige n Eck kann als ein unregelmäßiges (n + 1) Eck mit einem Winkel von 180° betrachtet werden.

XXII. **Anhang.**

Aufgaben zu 306—316.

1) Ein Rechteck in ein anderes mit gegebener Seite zu verwandeln. **178.**

2) Ein Quadrat in ein Rechteck mit gegebener Seite zu verwandeln.

3) Durch zwei Punkte A und B einen Kreis zu konstruieren, so daß die von einem dritten C an ihn gelegte Tangente eine gegebene Länge hat.

Bestimme mit **214** einen dritten Punkt des Kreises.

4—8) Zwei Seiten AB und BC eines Dreieckes durch eine Parallele zur dritten in X und Y so zu schneiden, daß

4) BX = CY;

5) AX + BY = s;

6) XY = CY ± AX;

7) XY + AC = AX + CY;

8) BX + BY = AC + AX + CY. **137.**

9) In ein Viereck eine Raute zu zeichnen, deren Seiten mit den Diagonalen des Viereckes parallel laufen.

10) Ein Dreieck durch eine Gerade, welche von einem auf einer Seite gegebenen Punkte ausgeht, nach dem Verhältnisse m : n zu teilen.

11) Auf dem einen Schenkel eines Winkels BAC ist ein Punkt B gegeben; auf diesem soll ein Punkt X so bestimmt werden, daß seine Entfernung von B seinem Abstande vom anderen Schenkel gleich ist.

Berechne die Entfernung des gesuchten Punktes von B aus AB = a und dem Abstand b des Punktes von AC. — Zwei Punkte.

12) In ein Dreieck ein Quadrat einzuschreiben.

13) In ein Dreieck ein Rechteck einzuschreiben, welches einem gegebenen ähnlich ist.

14) In ein Dreieck ein Rechteck von gegebenem Umfange (2 s) einzuschreiben.

15) Von einem rechtwinkligen Dreiecke kennt man die Hypotenuse und den Halbmesser des eingeschriebenen Kreises; es soll die Höhe berechnet und das Dreieck konstruiert werden.

Berechne die Fläche auf zweifache Art. **216.**

16) Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren aus einer Kathete und dem Halbmesser des eingeschriebenen Kreises.

17) Aus dem Umfange 2 s und der Höhe h eines rechtwinkligen Dreieckes die Hypotenuse zu berechnen und das Dreieck zu konstruieren.

18) Eine Strecke so zu teilen, daß die Differenz der Quadrate über den Abschnitten einem gegebenen Quadrate gleich wird.

19) Ein Dreieck durch eine Gerade in gegebener Richtung so zu schneiden, daß die beiden Teile gleichen Umfang erhalten.

Die Richtung sei durch eine Gerade bestimmt, welche durch eine Ecke geht

20) Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren aus einer Kathete und der Summe (Differenz) der Hypotenuse und der andern Kathete. **182.**

21) Von einem Dreiecke kennt man eine Seite, das Verhältnis der Abschnitte, in welche sie durch die Höhe geteilt wird, und die Differenz der beiden anderen Seiten; diese sollen berechnet und das Dreieck konstruiert werden. **184.** Zwei Dreiecke.

---

22) Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

23) Ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck zu konstruiren, welches einem gegebenen Dreiecke (g, h) gleich ist.

24) Ein Dreieck mit Beibehaltung des Winkels an der Spitze in ein gleichschenkliges zu verwandeln. Seite 111, A. 4.

25) Ein Parallelogramm in eine gleichwinklige Raute zu vewandeln.

26) Ein Trapez durch eine Parallele zu den parallelen Seiten so zu teilen, daß die Teile denjenigen durch eine Diagonale getrennten Dreiecken gleich werden, mit denen sie eine Seite gemeinsam haben.

Berechne die Transversale aus den parallelen Seiten des Trapezes.

27) Ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren, welches so groß ist als zwei gegebene gleichseitige Dreiecke zusammen.

28) Einen Kreis zu zeichnen, welcher der Summe zweier gegebenen Kreise gleich ist.

29) Einen Kreisring in einen Kreis zu verwandeln.

30) Einen Kreis zu zeichnen, welcher 2 (3; 5; 8) mal so groß ist als ein gegebener.

31) Durch einen gegebenen Punkt außerhalb eines Kreises eine Sekante so zu ziehen, daß sie durch den Kreis in zwei Abschnitte zerlegt wird, welche eine gegebene Strecke zur mittleren Proportionale haben.

32) Zur Seite AC eines Dreieckes ABC eine Parallele so ziehen, daß dieselbe die mittlere geometrische Proportionale zu den auf AB gebildeten Abschnitten wird.

33) Ein Dreieck durch eine Parallele zu einer Seite zu halbieren oder nach dem Verhältnisse m : n [2 : 7] zu teilen).

34) Ein Dreieck durch eine Gerade von gegebener Richtung zu halbieren (oder nach dem Verhältnisse m : n zu teilen.

Die Richtung sei durch eine Ecktransversale bestimmt.

35) Ein Rechteck zu konstruieren, welches seiner Hälfte ähnlich ist und dessen größere Seite eine gegebene Länge hat.

36) Ein Quadrat zu zeichnen, welches zu einem gegebenen Quadrate im Verhältnisse m : n (1 : 2; 2 : 3) steht.

37) Einen Kreis durch einen konzentrischen zu halbieren (oder nach dem Verhältnisse m : n zu teilen).

38) Ein Vieleck zu konstruieren, welches einem gegebenen ähnlich ist und dessen Fläche sich zu der des gegebenen Vieleckes wie m : n (1 : 2; 2 : 3) verhält.

39) In einem Kreise sind zwei zu einander senkrechte Durchmesser gezogen; es soll eine Sehne konstruiert werden, welche durch die Durchmesser in drei gleiche Teile geteilt wird.

Berechne den Abstand des Mittelpunktes von den Punkten, in welchen die Durchmesser von der Sehne geschnitten werden.

40) Einem Quadranten ein Quadrat einzuzeichnen, so daß auf jedem Halbmesser eine und auf dem Bogen zwei Ecken liegen.

41) Einen Kreis zu konstruieren, welcher einem Kreissektor mit dem Halbmesser r und einem Mittelpunktswinkel von 60° gleich ist.

42) Ein Trapez durch eine Parallele zu den parallelen Seiten zu halbieren.

Berechne die parallele Transversale.

43) Einen Kreisring durch einen konzentrischen Kreis zu halbieren.

44) Ueber einer gegebenen Strecke als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck mit gegebener Differenz der Kathetenquadrate zu konstruieren.

45) Zwei konzentrische Kreise sind gegeben; dieselben durch eine Gerade so zu schneiden, daß auf ihr drei gleiche Strecken entstehen.

46) Einen Kreis zu konstruieren, von welchem man die Längen (2a, 2b) zweier senkrechten Sehnen und die Entfernung (c) des Sehnenschnittpunktes vom Mittelpunkte kennt.

47) Ein Quadrat in ein gleichschenkliges Dreieck zu ver-

wandeln, in welchem sich die Grundlinie zum Schenkel wie 6 : 5 verhält.

48) In einem Kreis vier kongruente gleichseitige Dreiecke so zu zeichnen, daß das mittlere mit jedem äußeren eine Seite gemeinsam hat.

49) Ein Quadrat in ein rechtwinkliges Dreieck zu verwandeln, in welchem die eine Kathete das arithmetische Mittel zwischen der Hypotenuse und der anderen Kathete ist.

50) Ein Quadrat [Rechteck] in ein gleichseitiges Dreieck zu verwandeln.

51) Ein gleichseitiges Dreieck in ein Quadrat zu verwandeln.

52) Ein Dreieck in ein gleichseitiges zu verwandeln.

53) Ein Quadrat in ein reguläres Sechseck zu verwandeln.

54) Ein Quadrat in ein Rechteck zu verwandeln, welches einem gegebenen ähnlich ist.

55—56) Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren aus dem Verhältnisse der Hypotenusenabschnitte und

55) der Höhe, oder

56) einer Kathete.

57) Eine Raute zu zeichnen, von welchem die Fläche (a^2) und das Verhältnis der Diagonalen gegeben sind.

58) Durch einen gegebenen Punkt außerhalb (oder innerhalb) eines Kreises eine Gerade zu legen, so daß die vom Kreise abgeschnittene Sehne durch den Punkt nach einem gegebenen Verhältnisse geteilt wird.

59) Auf einer Geraden sind drei Punkte A, B, C gegeben. Auf der Senkrechten in dem ersteren Punkte A einen Punkt zu suchen, von dem aus AB und BC unter gleichen Winkeln erscheinen. 141.

60) Einem Kreise ein Dreieck einzuschreiben, von welchem das Verhältnis zweier Seiten und die Höhe auf die dritte Seite gegeben sind. Seite 82, A. 10.

61) Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes wird durch die Halbierungslinie des rechten Winkels in die Abschnitte a und b geteilt; das Dreieck zu konstruieren.

62) Ein gleichschenkliges Dreieck aus dessen Höhen zu konstruieren.

63) Auf einer Geraden sind vier Punkte A, B, C, D gegeben; es soll ein Quadrat gezeichnet werden, so daß zwei Gegenseiten durch A und B und die beiden anderen durch C und D gehen.

Berechne die Quadratseite aus den Strecken zwischen den gegebenen Punkten. 182. 146.

64) Einem Sektor ein Quadrat so einzuschreiben, daß eine Ecke auf dem Bogen und die anderen auf den Halbmessern liegen.

Ist die Senkrechte vom Endpunkte des einen Halbmessers auf den andern gleich a, die Strecke zwischen dem Fußpunkte und dem Mittelpunkte gleich b, so ist die Quadratseite

$$= \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+(a+b)^2}}.$$

65) In einen Sektor ein Quadrat einzuschreiben, so daß eine Quadratseite Sehne wird.

Wird der Bogen von der Sehne 2a überspannt und hat die Sehne vom Mittelpunkt den Abstand b, so ist die Seite des Quadrates

$$= \frac{2a\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+(2a+b)^2}}.$$

66) Von einem Trapeze durch eine Parallele zur Grundlinie ein Trapez abzuschneiden, welches mit einem gegebenen Quadrate gleiche Fläche hat.

67) Ein Rechteck und regelmäßiges Sechseck sind gegeben; ein Quadrat zu konstruieren, welches so groß ist als beide Figuren zusammen.

68) Ein regelmäßiges Sechseck zu konstruieren, welches einem gegebenen regelmäßigen Achteck mit der Seite a gleich ist.

69) Ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren, dessen Ecken auf drei gegebenen Parallelen liegen.

Die Seite ist $\frac{2}{3}\sqrt{b^2+bc+c^2}$, wenn b und c die Abstände der beiden äußeren Parallelen von der mittleren bezeichnen.

---

70) Eine gegebene Strecke a stetig zu teilen.

$$x^2+ax-a^2=0;\ x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Die negative Wurzel der quadratischen Gleichung bestimmt

einen Punkt auf der Verlängerung der Strecke, welcher der gestellten Bedingung entspricht.

71) Auf der Geraden AB einen Punkt zu suchen, welcher die Strecke AB = a so teilt, daß das Rechteck aus den beiden Abschnitten der Differenz der Quadrate über ihnen gleich ist.

72) Auf der Verlängerung von AB einen Punkt so zu bestimmen, daß das Rechteck aus den Abständen dieses Punktes von A und B dem Quadrate über AB gleich wird.

73) Eine Strecke in zwei Teile zu zerlegen, deren Rechteck gleich ist dem Rechteck aus der gegebenen Strecke und der Differenz ihrer Teile. (Setze den größeren Teil = x.)

74) Ein rechtwinkliges Dreieck aus der Hypotenuse a zu konstruieren, wenn die eine Kathete der Projektion der anderen auf die Hypotenuse gleich ist.

Berechne die größere Kathete. 158.

75) Ueber einer gegebenen Strecke als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, dessen Seiten eine stetige Proportion bilden. — Vergleiche die Resultate mit denen von A. 74.

76) Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, dessen Seiten eine stetige Proportion bilden und in dem die Summe aus der Hypotenuse und der kleineren Kathete gleich a ist.

77) Ein Rechteck mit gegebenem Umfange 2 s zu konstruieren, deren Fläche der Differenz der Seitenquadrate gleich ist.

78) Im Dreieck ABC zur Seite AC die Parallele XY so zu ziehen, daß $\triangle$ BXY = $\triangle$ AYB wird. Wie teilt Y die Seite BC?

79) Ein Quadrat in eine Raute zu verwandeln, deren Diagonalendifferenz der Quadratseite gleich ist.

Berechne die größere Diagonale.

80—81) In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Höhe der Differenz der Hypotenusenabschnitte gleich; dasselbe zu konstruieren, wenn gegeben ist

80) der größere Abschnitt, oder

81) die Höhe.

82) Durch den einen Endpunkt A eines Kreisdurchmessers AB eine Sekante so zu ziehen, daß der zwischen dem Kreise und der Tangente in B liegende Abschnitt dem Durchmesser gleich wird.

83) Auf dem Umfange des Halbkreises über der Strecke AB einen Punkt zu finden, dessen Abstand von der Tangente in A seiner Entfernung von B gleich ist.

84) Über der Strecke AB ist ein Halbkreis konstruiert und in dem Punkt C auf AB, dessen Abstand von A dem halben Radius gleich ist, die Senkrechte CD errichtet; durch A soll eine Sehne AF, welche CD in E schneide, so gezogen werden, daß EF dem Radius gleich ist.

Ziehe FG $\perp$ AB und verbinde F mit B.

85) Aus der Seite a eines regulären Zehnecks den Halbmesser des umgeschriebenen Kreises und das Polygon zu konstruieren.

86) Die Diagonale eines regelmäßigen Fünfecks ist gegeben. Es soll die Seite und das Polygon konstruiert werden.

87) Um den Mittelpunkt eines gegebenen Kreises einen zweiten Kreis zu zeichnen, so daß die (Maßzahl für) die Fläche des Kreisringes das geometrische Mittel ist zwischen den (Maßzahlen der) beiden Kreisflächen. — Zwei Kreise.

88) Ein Quadrat aus der Summe (Differenz) der Diagonale und Seite zu konstruieren.

89) Ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, von dem der Umfang 2s (die Differenz zwischen der Kathetensumme und der Hypotenuse) gegeben ist.

90) Einen Kreis zu konstruieren, welcher den Bogen und die Halbmesser eines gegebenen Quadranten berührt. 2 Lösungen.

91) Von einem Quadrate die vier Ecken derart abzuschneiden, daß ein reguläres Achteck übrig bleibt.

92) Eine Strecke a so zu teilen, daß das Quadrat über dem einen Abschnitte zweimal so groß ist als das Quadrat über dem andern.

93) Ein Rechteck zu konstruieren, welches halb so groß ist als ein gegebenes Quadrat und mit diesem gleichen Umfang hat.

94) Den Durchmesser eines Kreises soweit zu verlängern, daß die von dem Endpunkte der Verlängerung an den Kreis gezogene Tangente der Seite des eingeschriebenen Quadrates gleich wird.

95) Ein Quadrat in ein Rechteck von doppeltem Umfange zu verwandeln.

96) Ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren, wenn die Summe [Differenz] der Seite und Höhe gegeben ist.

97) In ein Quadrat soll ein gleichseitiges Dreieck so eingeschrieben werden, daß beide eine Ecke gemeinsam haben. — 2 Dreiecke.

98) Einem gleichseitigen Dreieck sollen drei Kreise eingeschrieben werden, von welchen jeder die beiden anderen und zwei Seiten berührt.

99) Einem gleichseitigen Dreieck ein Quadrat einzuschreiben.

100) Ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren, wenn die Summe (Differenz) aus der Seite und dem Halbmesser des umgeschriebenen Kreises gegeben ist.

101) Von einem gleichschenkligen Dreiecke, in welchem ein Basiswinkel doppelt so groß ist als der Winkel an der Spitze, ist der Umfang 2s gegeben; das Dreieck zu konstruieren.

102) Ein Quadrat in ein Rechteck von gegebener Seitendifferenz zu verwandeln.

103) Ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen aus der Höhe und der Differenz der Hypotenusenabschnitte.

104) Eine gegebene Strecke soweit zu verlängern, daß das Rechteck aus der Verlängerung und der ganzen verlängerten Strecke einem gegebenen Quadrat gleich wird.

105) Auf der Verlängerung des Durchmessers eines Kreises einen Punkt so zu bestimmen, daß die von ihm an den Kreis gelegte Tangente eine gegebene Länge hat.

106) Von einem gegebenen Punkte außerhalb eines Kreises an diesen eine Sekante so ziehen, daß die Sehne einer gegebenen Strecke gleich wird. — Die Lage des Punktes sei durch die Länge der von ihm an den Kreis gezogenen Tangente bestimmt.

107) Aus der Höhe und der Summe [Differenz] der Katheten die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks zu berechnen und das Dreieck zu konstruieren.

108) Eine gegebene Strecke so zu teilen, daß das Rechteck aus den beiden Abschnitten einem gegebenen Quadrate gleich ist.

109) Ein Quadrat in ein Rechteck mit gegebenem Umfang (2s) zu verwandeln.

110) Einem rechtwinkligen, gleichschenkligen Dreiecke ein Rechteck einzuzeichnen, welches mit dem Dreiecke den rechten Winkel gemeinsam hat und einem gegebenen Quadrate gleich ist.

111) Ein Rechteck in ein anderes von gegebenem Umfange (2s) zu verwandeln.

112) Eine Strecke so weit zu verlängern, daß das Rechteck aus der verlängerten Linie und der Verlängerung einem gegebenen Rechteck gleich ist.

113) Eine Raute aus der Fläche (a^2) und der Summe (s) der Diagonalen zu konstruieren.

114) Ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen, wenn die Fläche (a^2) und die Summe der Grundlinie und Höhe gegeben sind.

115) Ein rechtwinkliges Dreieck aus der Höhe und Kathetensumme zu konstruieren.

Berechne die Hypotenuse.

116) Die Strecke AB = a durch zwei Punkte C und D, deren Abstand b ist, harmonisch d. h. so zu teilen, daß

$$AC : CB = AD : BD.$$

Berechne den Abstand des Punktes C von der Mitte der Strecke AB.

117) In einen Kreisabschnitt, dessen Sehne a von dem Mittelpunkt einen Abstand b hat, soll ein Quadrat eingeschrieben werden.

118) Eine Strecke so zu teilen, daß die Summe der Quadrate über den einzelnen Teilen einem gegebenen Quadrate gleich ist.

119) Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, wenn die Hypotenuse und die Summe (Differenz) der Katheten gegeben ist.

120) Ein Rechteck aus der Diagonale (d) und dem Umfange (2s) zu konstruieren.

121) Eine Raute zu konstruieren aus der Seite und Summe (Differenz) der Diagonalen.

122) Zwei gegebene Quadrate sollen so aufeinandergelegt werden, daß die Ecken des kleineren auf den Seiten des größeren zu liegen kommen.

123) Einem gegebenen Quadrate soll ein anderes so um-

geschrieben werden, daß die Differenz der Abschnitte, in welche jede Seite des umgeschriebenen Quadrates durch die Ecken des gegebenen geteilt wird, einer gegebenen Strecke gleich wird.

124) Einem Kreise ein Rechteck von gegebenem Umfang (2s) oder gegebener Seitendifferenz einzuschreiben.

125) Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren aus der Summe (Differenz) der Hypotenuse und je einer Kathete.

126) Von einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse und die Summe aus der Höhe und den Katheten gegeben. Es soll die Höhe berechnet und das Dreieck gezeichnet werden.

127) Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren aus der Summe der Katheten und der Differenz zwischen der Hypotenuse und einer Kathete.

128) In einem Kreise mit dem Halbmesser r ist zu einem Durchmesser in einem Abstande a vom Mittelpunkt eine senkrechte Sehne gezogen; einen Kreis zu konstruieren, welcher den Durchmesser, die Sehne und den Kreis berührt.

129) Die Ecken eines Rechteckes abzuschneiden, so daß ein gleichseitiges Achteck entsteht.

130) Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes wird durch den eingeschriebenen Kreis in die Abschnitte a und b zerlegt; das Dreieck zu konstruieren.

Berechne den Halbmesser des eingeschriebenen Kreises.

131) Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren aus der Hypotenuse und dem Halbmesser des eingeschriebenen Kreises.

Berechne einen der Abschnitte, in welche die Hypotenuse durch den Berührungspunkt des eingeschriebenen Kreises zerlegt wird.

132) Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, von welchem man die Differenz der Katheten und die Summe aus der Hypotenuse und der größeren Kathete kennt.

133) Ein Dreieck durch eine Gerade so zu schneiden, daß beide Teile des Dreieckes gleichen Umfang und gleiche Fläche haben.

134) Einem Dreieck ein Rechteck einzuschreiben, welches einem gegebenen Quadrate gleich ist.

135) Einem Kreise mit dem Halbmesser r ein Trapez mit den parallelen Seiten a und b einzuschreiben.

136) In den Endpunkten des Durchmessers AB eines Kreises sind die Tangenten konstruiert; eine dritte Tangente CD so zu ziehen, daß das Trapez ABCD einem gegebenen Quadrate gleich wird?

137) Ein Quadrat in ein Rechteck zu verwandeln, welches eine gegebene Strecke zur Diagonale hat.

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{d^2 + 2a^2} \pm \sqrt{d^2 - 2a^2}\right).$$

138) Einem Kreise ein Rechteck von gegebener Fläche (a^2) einzuschreiben.

139) Um den Mittelpunkt eines Kreises soll ein zweiter Kreis so beschrieben werden, daß die Fläche desselben die mittlere Proportionale ist zwischen der gegebenen Kreisfläche und der des Kreisringes.

$$x = \sqrt{r\left(-\frac{r}{2} + r\sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2}\right)}$$

140) Auf einer Geraden sind drei Punkte A, B, C gegeben; ein Rechteck von gegebener Fläche zu zeichnen, so daß eine Ecke in dem Punkte B liegt und zwei Seiten durch A und C gehen.

141) Ein rechtwinkliges Dreieck von gegebenem Inhalte (a^2) zu zeichnen, in welchem die Differenz der Quadrate über den Hypotenusenabschnitten einem gegebenen Quadrate (b^2) gleich ist.

$$\text{Kathete} = \sqrt{b\left(\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a^2}{b}\right)^2}\right)}$$

142) Ein Rechteck in ein anderes zu verwandeln, so daß die Differenz der Quadrate über zwei anstoßenden Seiten einem gegebenen Quadrate gleich ist.

$$\text{Seite} = \sqrt{c\left(\frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{ab}{c}\right)^2}\right)}$$

143—146) Ein Winkel und ein Punkt P sind gegeben. Durch diesen eine Gerade so zu ziehen,

143) daß das entstehende Dreieck eine gegebene Fläche hat;

144) daß die Summe der Abschnitte auf den Schenkeln einer gegebenen Strecke gleich ist;

145) daß das Rechteck aus den Abschnitten auf den Schenkeln eine gegebene Fläche hat;

146) daß das Rechteck aus den Abschnitten, in welche die

von den Schenkeln begrenzte Gerade durch P geteilt wird, einem gegebenen Quadrate gleich ist.

Unterscheide, ob der Punkt innerhalb oder außerhalb des Winkelraumes liegt. Um die Lage des Punktes zu bestimmen, ziehe durch ihn die Parallelen zu den Schenkeln.

Aufgaben über Maxima und Minima.

147) Von allen Rechtecken mit gegebenem Umfange 2s dasjenige zu konstruieren, welches den größten Inhalt hat.

Auflösung. Bezeichnen x und y die Seiten des gesuchten Rechteckes, so ist dessen Fläche $= xy = x(s - x)$, da $x + y = s$ sein soll. Die Größe, welche ein Maximum werden soll, setzen wir einer Unbekannten v gleich und lösen die Gleichung

$$x(s - x) = v$$

nach x auf. Die Wurzel

$$x = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - v}$$

läßt erkennen, daß x imaginär wird, wenn $v > \left(\frac{s}{2}\right)^2$. Der größte Wert von v ist also derjenige, für welchen der Radikand verschwindet. Somit ist $v = \left(\frac{s}{2}\right)^2$ und $x = y = \frac{s}{2}$.

148) Von allen Rechtecken mit gegebenem Umfange 2s dasjenige zu konstruieren, welches die kleinste Diagonale hat.

149—150) Die Strecke AB in X so zu teilen,

149) daß $AX^2 + XB^2$ ein Minimum wird;

150) daß $m \cdot AX^2 + n \cdot XB^2$ ein Minimum wird.

151—152) Einem gegebenen Kreise ein Trapez umzuschreiben,

151) dessen Fläche ein Minimum ist;

152) dessen Umfang ein Minimum ist.

153—154) Einem gegebenen Kreise ein Rechteck einzuschreiben,

153) welches den größten Inhalt hat;

154) welches den größten Umfang hat.

155) Einem gegebenen Quadrate das kleinste Quadrat einzuschreiben.

156) Einem gegebenen gleichseitigen Dreieck das kleinste gleichseitige Dreieck einzuschreiben.

157) Unter allen Sektoren von gleichem Umfange 2s den größten zu bestimmen.

Drücke die Fläche durch den Bogen und den Halbmesser aus.

158) Unter allen Sektoren, welche einem gegebenen Quadrate gleich sind, denjenigen anzugeben, welcher den kleinsten Umfang hat.

159) Unter allen Rechtecken, welche einem Quadranten so eingeschrieben sind, daß eine Ecke in den Mittelpunkt fällt, dasjenige zu konstruieren, welches die kleinste Fläche oder den kleinsten Umfang hat.

160) In einen Halbkreis das größte Rechteck einzuschreiben.

161—162) Unter den Rechtecken, welche einem Quadranten so eingeschrieben sind, daß zwei Ecken auf dem Bogen liegen, dasjenige zu bestimmen, welches

161) die größte Fläche,

162) den kleinsten Umfang hat.

163) Das kleinste von allen rechtwinkligen Dreiecken mit gegebener Höhe zu konstruieren.

164) Ein rechter Winkel wird um einen gegebenen Punkt zwischen zwei festen Parallelen gedreht; die Schenkel schneiden die Parallelen in den Punkten A und B. Bei welcher Lage des Winkel ist die Fläche des Dreieckes PAB ein Minimum.

165) In ein Dreieck mit der Grundlinie b und der Höhe h ein möglichst großes Rechteck einzuschreiben.

166) In ein Quadrat ein Rechteck einzuschreiben, so daß die Seiten desselben den Diagonalen parallel laufen und die Fläche ein Maximum ist.

167) Welches ist die kleinste unter den Rauten, welche einem gegebenen Quadrate umgeschrieben sind und deren Diagonalen die Seiten des Quadrates senkrecht halbieren.

168) Auf der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes einen Punkt zu suchen, so daß die von demselben auf die Katheten gefällten Senkrechten mit den Katheten ein möglichst großes Rechteck einschließen.

169) Welches ist das größte von allen Dreiecken, deren Spitzen im Mittelpunkte eines gegebenen Kreises liegen und deren Grundlinien parallele Sehnen sind?

170) Durch einen Punkt zwischen den Schenkeln eines rechten Winkels eine Gerade so zu ziehen, daß die Fläche des vom Winkel abgeschnittenen Dreieckes ein Minimum wird.

Buchdruckerei der Jos. Kösel'schen Buchhandlung in Kempten.

Buchdruckerei der Jos. Kösel'schen Buchhandlung in Kempten.

Lengauer, Jos.

Aufgaben zu Stegmann's Grundlehren der ebenen Geometrie von Jos Lengauer

Kempten 1885